PRIMER CURSO DE LÓGICA MATEMÁTICA

PATRICK SUPPES

SHIRLEY HILL

EDITORIAL REVERTÉ COLOMBIANA, S. A

Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México - Rio de Janeiro

Titulo de la obra original

FIRST COURSE IN MATHEMATICAL
LOGIC

Editada por

BLAISDELL PUBLISHING COMPANY
A División of Ginn and Company
Nueva York

Versión española de

DR. ENRIQUE LINÉS ESCARDÓ
Catedrático de la Facultad de
Ciencias de Barcelona

Propiedad de ***EDITORIAL REVERTÉ, S. A.*** ***Encarnación, 86 Barcelona (12)***

Edición en español

ISBN 84-291-5150-8

EDITORIAL REVERTÉ COLOMBIANA, S. A
Calle 37 No. 22-72 - Santafé de Bogotá, D.C.

Impreso por Quebecor World Bogotá S.A.
Impreso en Colombia - Printed in Colombia

PRÓLOGO

Modernamente la Lógica se ha convertido en una materia no sólo profunda, sino de gran amplitud y aplicación a otras Ciencias. Sólo desde hace algunos años se han establecido relaciones sistemáticas entre la Lógica y la Matemática, formulándose una teoría de inferencia completamente explícita que se adecua a todos los ejemplos típicos del razonamiento deductivo en Matemáticas y a las Ciencias empíricas. En la mente de todos los matemáticos modernos está el concepto de axioma y la deducción de teoremas a partir de axiomas. El propósito de este libro es introducir al estudiante en el método deductivo de la Matemática moderna, a un nivel que, aun siendo riguroso, sea lo suficientemente sencillo en presentación y contexto, para que permita una fácil comprensión.

No se puede poner en duda la importancia en la Matemática moderna, de la teoría de la demostración y de la metodología en la deducción de teoremas a partir de axiomas. Sin embargo, el desarrollo de la destreza en los razonamientos deductivos, ha sido considerado como de interés secundario en los planes de enseñanza de especialización matemática. El punto de vista representado en este libro es el de que una enseñanza de lógica matemática bien meditada y planeada, al principio de la carrera del estudiante le proporcionará una base para estudios de Matemáticas más profundos y penetrantes.

El objetivo del presente volumen comprende la teoría proposicional de inferencia, inferencia con cuantificadores universales, y aplicaciones de la teoría de la inferencia al desarrollo de la teoría elemental de grupos conmutativos, o la teoría de la adición, que es como se ha desarrollado en el texto. Debido a las complejidades que introducen los cuantificadores existenciales se ha dejado su consideración para el volumen siguiente, *Segundo curso de Lógica matemática*. Se puede observar que la restricción a los cuantificadores universales que se presentan al principio de fórmulas no es tan severa como pudiera parecer. La mayor parte de las teorías matemáticas elementales con las que se puede encontrar el estudiante pueden formularse dentro de esta armazón. Esta restricción proporciona al estudiante una oportunidad para aprender cómo se hacen demostraciones matemáticas rigurosas y no triviales, sin adentrarse en las sutilezas que envuelven los cuantificadores existenciales. Se ha insistido también mucho a lo largo del libro en la importancia del problema de traducir a símbolos lógicos o matemáticos proposiciones enunciadas en lenguaje corriente.

El presente libro es la cuarta versión de un conjunto de notas desarrolladas en 1960-61 para ser utilizadas en una clase experimental de alumnos seleccionados de una escuela elemental. La segunda versión del texto se utilizó en once clases de estudiantes seleccionados de la escuela elemental en 1961-62. La tercera versión se utiliza experimentalmente en 1962-63 con diez clases de estudiantes seleccionados de la escuela elemental y 200 estudiantes del «College» en un proyecto patrocinado conjuntamente por el Office of Education y la National Science Foundation. La edición del libro fue subvencionada por la Carnegie Corporation de Nueva York.

Se ha intentado escribir el libro de manera que lo puedan utilizar los estudiantes con un margen de edad y habilidad muy amplio. La Lógica, afortunadamente, es una de las materias que no requiere gran base o experiencia para poder llegar a un buen adiestramiento. Por esta razón, un libro de este tipo particular puede ser utilizado por una gran variedad de estudiantes. La experiencia con las versiones citadas indica que el material que contiene es razonablemente satisfactorio para los estudiantes seleccionados de Segunda enseñanza y, por otra parte, no demasiado elemental para que no pueda ser utilizado por alumnos de primer curso de la Universidad. Creemos que este libro será útil a una gran diversidad de alumnos de Enseñanza media y a las clases de Matemáticas de Selectivo de la Facultad. Está en preparación el *Segundo curso de Lógica matemática* para aquellas clases que dispongan de tiempo para una exposición más amplia de esta materia.

Agradecemos a Mrs. Madeline Anderson su trabajo paciente y competente de mecanografiar el manuscrito. Manifestamos nuestro mayor reconocimiento a Mr. Frederick Binford por sus valiosas sugerencias y críticas, quien se ha hecho también responsable de preparar la detallada Edición para el maestro. Mr. Richard Friedberg hizo muchos comentarios y críticas muy útiles al último borrador de manuscrito.

PATRICK SUPPES
SHIRLEY HILL

Universidad de Stanford
Stanford, California
Enero, 1963

INDICE ANALÍTICO

CAPITULO 1

SIMBOLIZACIÓN DE PROPOSICIONES

● 1.1 *Proposiciones*

Con el estudio de la Lógica se persigue llegar a ser preciso y cuidadoso. La Lógica tiene un lenguaje exacto. Pero aunque así sea, vamos a intentar construir un vocabulario para este lenguaje preciso utilizando el lenguaje cuotidiano algunas veces un tanto confuso. Es necesario redactar un conjunto de reglas que sean perfectamente claras y definidas y que estén libres de las vaguedades que pueden hallarse en nuestro lenguaje corriente. Para realizar este trabajo se utilizarán proposiciones en lengua castellana, de la misma manera que se usa la lengua castellana para explicar las reglas precisas de un juego a alguien que no ha jugado a ese juego. Por supuesto, la lógica es algo más que un juego. Puede ayudarnos a aprender una forma de razonar que es exacta y a la vez muy útil.

Para empezar, consideremos las proposiciones en lengua castellana. Cada proposición tiene una forma lógica a la que se le dará un nombre. En primer lugar, se consideran y simbolizan dos clases de proposiciones en Lógica; unas se denominan proposiciones *atómicas* y otras proposiciones *moleculares*.

En este siglo de la Ciencia se utiliza la palabra *atómico* muchas veces. Efectivamente, el significado de esta palabra en el lenguaje de la Lógica es análogo a su significado original en las Ciencias físicas. En Lógica, *atómicas* son las proposiciones de forma más simple (o más básicas). Si se juntan una o varias proposiciones atómicas con un término de enlace, se tiene una proposición *molecular*. Una proposición atómica es una proposición completa sin términos de enlace. Se utilizan términos de enlace para formar proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas.

Por ejemplo, considérense dos proposiciones atómicas,

Hoy es sábado.
No hay clase.

Ambas proposiciones son atómicas. Mediante un término de enlace se pueden unir y se tendrá una proposición molecular. Por ejemplo, se puede decir

Hoy es sábado y no hay clase.

Esta proposición molecular se ha construido con dos proposiciones atómicas y el término de enlace «y». Cuando analizamos una proposición molecular la descomponemos en las más pequeñas proposiciones atómicas completas. En el ejemplo anterior se puede descomponer la proposición molecular en dos proposiciones atómicas. El término de enlace «y» no forma parte de ninguna de las proposiciones atómicas. Se ha añadido a las proposiciones atómicas para construir una proposición molecular.

● 1.2 *Términos de enlace*

Las palabras de enlace, por cortas que sean, no deben subestimarse, pues son de gran importancia. Tanto es así, que se estudiarán algunas reglas muy precisas para el uso de esta clase de términos. Gran parte de lo que se tratará en el estudio de la Lógica se refiere a la manera cuidadosa de cómo se han de utilizar estos términos de enlace. El término de enlace en la proposición del ejemplo «Hoy es sábado y no hay clase» es la palabra «y». Hay otros, pero antes de considerar cada uno de ellos separadamente, les daremos el nombre lógico correcto. Se les denominará *términos de enlace de proposiciones.* Este nombre será fácil de recordar, porque indica efectivamente cuál es el papel que desempeñan. Enlazan proposiciones. Forman proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas.

Los términos de enlace que se utilizarán en este capítulo son las palabras «y», «o», «no», y «si..., entonces». En la gramática castellana se les da a veces otros nombres, pero en Lógica los denominaremos, como ya hemos indicado, *términos de enlace de proposiciones* o simplemente *términos de enlace.* Recuérdese que al añadir un término de enlace a una o dos proposiciones atómicas se ha formado una proposición molecular. Los tres términos de enlace considerados, «y», «o», «si..., entonces», se usan para enlazar dos proposiciones atómicas, pero el otro se agrega a una sola proposición atómica para formar una molecular. Este término de enlace es la palabra «no». Se puede decir que el término de enlace «no» cada vez actúa sobre *una* sola proposición atómica y que los otros términos de enlace actúan sobre *dos* proposiciones atómicas a la vez. Recuérdese que el término dc enlace «no», es el único que no conecta realmente *dos* proposiciones. Cuando a una sola proposición se le agrega «no» se forma una proposición molecular.

Se dan a continuación algunos ejemplos de proposiciones moleculares que utilizan los términos de enlace considerados.

La proposición

La luna no está hecha de queso verde

es una proposición molecular que utiliza el término de enlace «no». En este caso, el término de enlace actúa sólo sobre *una* proposición atómica: «La luna está hecha de queso verde».

Un ejemplo de una proposición en la que se utiliza el término de enlace «o» es

El viento arrastrará las nubes o lloverá hoy con seguridad.

El término de enlace «o» actúa sobre *dos* proposiciones atómicas. Son «El viento arrastrará las nubes» y «Lloverá hoy con seguridad».

La proposición molecular:

Si estamos en diciembre entonces llegará pronto Navidad

ilustra sobre el uso del término de enlace «si..., entonces», que también actúa sobre *dos* proposiciones atómicas. ¿Cuáles son?

Ya se ha dado un ejemplo de proposición que utiliza el término de enlace «y». Otra es:

El terreno es muy rico y hay suficiente lluvia.

¿Cuáles son las dos proposiciones atómicas contenidas en esta proposición molecular??

Los ejercicios que se ponen a continuación ofrecen una oportunidad para comprobar la habilidad del lector para reconocer proposiciones atómicas, proposiciones moleculares y términos de enlace. Recuérdese que cada proposición que contiene un término de enlace es molecular.

Ejercicio 1

A. Señalar cada proposición atómica con una A y cada proposición molecular con una M. Escribir junto a cada proposición molecular el término de enlace utilizado.

1. La comida será hoy a las tres en punto.
2. El gran oso negro andaba perezosamente por el camino de abajo.
3. La música es muy suave o la puerta está cerrada.
4. A este perro grande le gusta cazar gatos.

5. Él pregunta por su pipa y pregunta por su escudilla.
6. Luis es un buen jugador o es muy afortunado.
7. Si Luis es un buen jugador, entonces participará en el partido del colegio.
8. California está al oeste de Nevada y Nevada al oeste de Utah.
9. Muchos estudiantes estudian Lógica en el primer año de carrera.
10. Los gatitos no acostumbran a llevar mitones.
11. Si los gatitos llevan mitones, entonces los gatos pueden llevar sombreros.
12. Se puede encontrar a Juana en casa de Susana.
13. A las focas no les crece el pelo.
14. Si María canta, entonces es feliz.
15. Los alumnos mayores no están en la lista antes que los jóvenes.
16. La asignatura preferida de Jaime es Matemáticas.
17. Si aquellas nubes se mueven en esa dirección, entonces tendremos lluvia.
18. Si los deseos fueran caballos, entonces los mendigos cabalgarían.
19. Esta proposición es atómica o es molecular.
20. El sol calentaba y el agua estaba muy agradable.
21. Si $x=0$ entonces $x+y=1$.
22. $x+y>2$.
23. $x=1$ o $y+z=2$.
24. $y=2$ y $z=10$.

B. Formar cuatro proposiciones moleculares utilizando una o dos de las proposiciones escritas a continuación junto con un término de enlace. Por ejemplo, se puede poner el término de enlace «y» entre dos de ellas y también se puede utilizar la misma proposición atómica más de una vez. Utilícese cada uno de los cuatro términos de enlace *una sola vez,* de manera que cada una de las proposiciones moleculares tenga distinto término de enlace.

1. El viento sopla muy fuerte.
2. Pablo podría ganar fácilmente.
3. La lluvia puede ser la causa de que abandone la carrera.
4. Veremos qué planes hay para mañana.
5. Todavía tendríamos tiempo de llegar a las siete.
6. El amigo de Juan tiene razón.
7. Estábamos confundidos respecto a la hora de la junta.

C. Decir cuáles son los términos de enlace en las proposiciones siguientes. Decir cuántas proposiciones atómicas se encuentran en cada proposición molecular. Recuérdese que «si..., entonces» es un solo término de enlace.

1. Este no es mi día feliz.
2. Ha llegado el invierno y los días son más cortos.
3. Muchos gérmenes no son bacterias.
4. Los anfibios se encuentran en el agua fresca o se encuentran en la tierra cerca de sitios húmedos.
5. Si hay fallas en las grandes masas rocosas, entonces es posible que ocurran terremotos.
6. Este número es mayor que dos o es igual a dos.
7. Si es un número positivo entonces es mayor que cero.
8. Este chico es mi hermano y yo soy su hermana.
9. Mi puntuación es alta o recibiré una calificación baja.
10. Si usted se da prisa entonces llegará a tiempo.
11. Si $x>0$ entonces $y=2$.
12. Si $x+y=2$ entonces $z>0$.
13. $x=0$ o $y=1$.
14. Si $x=1$ o $z=2$ entonces $y>1$.
15. Si $z>10$ entonces $x+z>10$ y $y+z>10$.
16. $x+y=y+x$.

D. Escribir primero cinco proposiciones atómicas y formar después cinco proposiciones moleculares.

1.3 *La forma de las proposiciones moleculares*

Las reglas para el uso de los términos de enlace son las mismas, cualesquiera que sean las proposiciones atómicas que enlazan o en las que se han utilizado. En uno de los ejercicios anteriores se vio que era posible elegir una o dos proposiciones atómicas cualesquiera de un grupo y combinarlas con un término de enlace. La *forma* de las proposiciones moleculares construidas depende del término de enlace seguido, no del contenido de la proposición o proposiciones atómicas. Es decir, si en una proposición molecular se sustituyen las proposiciones atómicas por otras proposiciones atómicas cualesquiera, la forma de la proposición molecular se conserva. La misma manera de escribir el término de enlace «si..., entonces...» lo indica. Los puntos suspensivos después de «si» y los puntos suspensivos después de «entonces» ocupan el lugar de las proposiciones. Para formar proposiciones moleculares utilizando este término de enlace basta simplemente sustituir los puntos suspensivos por proposiciones atómicas *cualesquiera*.

Podemos darnos cuenta fácilmente de la *forma* de una proposición molecular, no escribiendo las proposiciones atómicas de que consta y sólo indicando el lugar que ocupan. Se puede representar la forma de una proposición molecular utilizando el término de enlace «y» de la manera siguiente

_________ y _________

o bien

(   ) y (   )

Se pueden sustituir los espacios por cualquier proposición y la forma es la misma. Por ejemplo, eligiendo las proposiciones «Es rojo» y «Es azul» y poniéndolas en los espacios señalados, se tiene la proposición molecular «Es rojo y es azul». Se podrían haber escogido otras dos proposiciones atómicas y formar, por ejemplo, la proposición «Yo soy alto y él es bajo». La forma permanece la misma. Se trata de una proposición molecular en la que se utiliza el término de enlace «y». Otra manera de poner de manifiesto la forma es encerrar entre paréntesis las proposiciones atómicas, cuando se ha escrito la proposición molecular como en los ejemplos siguientes:

(Es rojo) y (es azul).
(Llueve) y (Pedro se ha mojado).

Hemos dicho que se pueden llenar los espacios con proposiciones cualesquiera, incluso sin limitarnos a proposiciones atómicas. Se pueden también utilizar proposiciones moleculares y la *forma* es la misma. Por ejemplo, se puede llenar el primer espacio con la proposición molecular «Juan no está aquí», y el segundo espacio con la proposición molecular «Andrés no está aquí». La proposición será entonces

Juan no está aquí y Andrés no está aquí.

De nuevo, la forma es la misma. El término de enlace «y» enlaza dos proposiciones, pero en este caso son proposiciones moleculares.

También se podría utilizar una proposición molecular y una proposición atómica, como en:

Juan no está aquí y Luis está aquí.

Lo importante es que cualesquiera que sean las proposiciones con las que se llenen los espacios, la forma es la de una proposición molecular con el término de enlace «y».

Todo lo dicho es aplicable a los otros términos de enlace. Podemos poner de manifiesto la forma de otros tipos de proposiciones moleculares de la manera siguiente:

(   ) o (   ).
Si (   ) entonces (   ).

Se pueden llenar los espacios con proposiciones cualesquiera, atómicas o moleculares. A continuación se dan ejemplos, en algunos de los cuales se usan paréntesis para mayor claridad.

María está aquí o Elena está en casa.
(Juan está en la ciudad) o (María no está en casa).
Si $2+3=x$ entonces $x=5$.
Si $(y+1=4)$ entonces $(y=3)$.
Si (José no es infiel) entonces (Juan es fiel).

Algunas veces, en castellano se utiliza una sola palabra para un término de enlace particular, pero otras veces se usan dos o más. Por ejemplo, se puede utilizar la única palabra «o» como término de enlace como en:

Es muy pesado o es hueco,

o se puede escribir la misma frase añadiendo la palabra «o» al principio como una parte del término de enlace:

O es muy pesado o es hueco.

Las dos palabras «o» son partes del mismo término de enlace. En las proposiciones en castellano algunas veces se utiliza «o»-«o» y otras sólo «o». Cuando se hable del término de enlace «o» se sobreentenderá que puede incluir también una «O» inicial, si se desea utilizar. La forma para el término de enlace «o» puede ser, por tanto:

O (   ) o (   ).

Los ejemplos que siguen son de esta forma:

O Juan está aquí o no llueve.
O (María no está aquí) o (Susana no está aquí).
O $x+y=6$ y $y=2$, o $x=0$.
O $(x+y=7$ y $y\neq 2)$ o $(x>0)$.

En algunos casos, al utilizar el término de enlace «y» pueden incluirse las palabras «A la vez». Por ejemplo, se puede decir:

A la vez llueve y sale el sol.

Las palabras «a la vez» e «y» son partes de un mismo término de enlace. En general sólo se utiliza «y», pero ocasionalmente también «a la vez». Siempre nos referiremos al término de enlace «y», pero podrá presentarse en la forma:

A la vez ( ) y ( ).

Por ejemplo,

A la vez $(x>0)$ y $(y\neq 0)$.
A la vez $x\neq y$ y $y\neq z$.

En muchos casos en que se utiliza el término de enlace «si..., entonces...» se incluyen ambas palabras, sin embargo, frecuentemente nos encontramos que se suprime la palabra «entonces». Por ejemplo:

Si es Felipe, es lento.

Proposiciones de esta clase están formadas por el término de enlace «si..., entonces...» y son de la forma:

Si ( ), ( ).

Ejemplos de esta forma son:

Si $x+y=2$ y $y=0$, $x=2$.
Si $(x+y=7$ y $x=6)$, $(y=1)$.
Si María quiere a Juan, Juan quiere a María.

La palabra «no», en castellano, se encuentra muy frecuentemente dentro de las proposiciones atómicas. Por este motivo es fácil olvidarla. Pero una proposición tal como:

La lógica no es difícil,

es una proposición molecular puesto que contiene el «no». Es posible escribir este término de enlace utilizando la frase «no ocurre que». La proposición se leería entonces:

No ocurre que la lógica sea difícil.

Entonces es posible presentar la forma de una proposición molecular utilizando el término de enlace «no» del siguiente modo:

No ocurre que ( ),

o más brevemente:

no ( ).

Ejemplos de esta forma son:

No ocurre que $(x=0)$.

No ocurre que $(x+y>2)$.
No $(x=2+1)$.
No $(7>x+y)$.

Evidentemente, el uso de «No ( )» es infrecuente en el lenguaje castellano, pero se verá más tarde que es de utilidad su uso en los contextos matemáticos.

En las proposiciones matemáticas en las que se utiliza el signo igual $=$, se indica con frecuencia la negación con un trazo inclinado sobre el signo igual: $\neq$. Así, «$x\neq 1$» se lee «x no es igual a 1».

En ninguna de las dos proposiciones «$x\neq 1$» y «Juan no está aquí», se puede utilizar el paréntesis para mostrar la forma de la proposición molecular, porque el término de enlace «no» aparece dentro de la proposición atómica.

Ejercicio 2

A. Utilizar el paréntesis para poner de manifiesto la forma de las siguientes proposiciones moleculares.

1. Juan está aquí y María ha salido.
2. Si $x+1=10$ entonces $x=9$.
3. O María no está aquí o Juan se ha ido.
4. Si $x=1$ o $y=2$ entonces $z=3$.
5. Si $x\neq 1$ y $x+y=2$ entonces $y=2$.
6. Si Pedro está en casa o Juan está en el patio, entonces José es inocente.
7. $y=0$ y $x=0$.
8. O $y=0$ y $x\neq 0$ o $z=2$.
9. No ocurre que $6=7$.
10. No ocurre que si $x+0=10$ entonces $x=5$.

B. Escribir en lenguaje corriente proposiciones de las formas siguientes. Suprimir los paréntesis al escribir las proposiciones.

1. O ( ) o ( ).
2. ( ) o ( ).
3. A la vez ( ) y ( ).
4. ( ) y ( ).
5. No ( ).
6. Si ( ) entonces ( ).
7. Si ( ), ( ).
8. Si no ( ) entonces no ( ).
9. No ocurre que ( ).

● 1.4 *Simbolización de proposiciones*

Generalmente se cree que las proposiciones atómicas son proposiciones cortas, pero también algunas de las proposiciones atómicas del lenguaje corriente son largas, resultando por ello pesadas y de difícil manejo. En Lógica se afronta este problema utilizando *símbolos* en lugar de las proposiciones completas.

Los símbolos que usaremos en lógica para representar proposiciones, son letras mayúsculas tales como «**P**», «**Q**», «**R**», «**S**», «**A**», y «**B**». Por ejemplo, sea:

P = «La nieve es profunda».
Q = «El tiempo es frío».

Consideremos ahora la proposición «La nieve es profunda y el tiempo es frío». Primero escribiremos la forma lógica de la proposición haciendo uso de los paréntesis:

(La nieve es profunda) y (el tiempo es frío).

Utilizando « **P** » y « **Q**» queda simbolizada la proposición de la manera siguiente

(**P**) y (**Q**).

Supongamos ahora que se desea simbolizar una proposición molecular que utiliza el término de enlace «o», y se considera la proposición «Se puede elegir sopa o se puede elegir ensalada». La simbolizaremos de la manera siguiente:

Sea

R = «Se puede elegir sopa»
S = «Se puede elegir ensalada».

y la proposición quedará simbolizada por

(**R**) o (**S**).

Al simbolizar una proposición que contiene el término de enlace «no», la palabra «no» se pone delante del símbolo que sustituye a la proposición atómica, aunque ordinariamente en castellano la palabra «no» se encuentre dentro de la proposición atómica sobre la que actúa. El término de enlace, sin embargo, no es una parte de la proposición atómica y, por tanto, la palabra «no», debe separarse de la proposición atómica. Por ejemplo, simbolizaremos la proposición «Los patos no son animales de cuatro patas» de la siguiente manera:

Sea

Q=«Los patos son animales de cuatro patas»,

la proposición molecular será entonces

No (**Q**).

El último símbolo sustituye sólo a la proposición atómica y no incluye el término de enlace.

Se verá más adelante que si se utilizan símbolos para las proposiciones atómicas es más fácil trabajar con las proposiciones moleculares, que pueden resultar muy largas y complicadas.

Los ejercicios que se dan a continuación pueden servir para adquirir práctica en la simbolización de proposiciones.

EJERCICIO 3

A. Simbolizar las proposiciones moleculares siguientes sustituyendo las proposiciones atómicas por letras mayúsculas.

1. Necesito ponerme las gafas o esta luz es débil.

Sea

G=«Necesito ponerme las gafas»
L=«Esta luz es débil»,

entonces la proposición queda simbolizada en la forma

(**G**) o (**L**).

2. Los patitos no se transforman en cisnes.
3. Daba tres pasos hacia la derecha y entonces iba dos pasos hacia adelante.
4. Estos problemas no son fáciles para mí.
5. Si suena el timbre, entonces es hora de empezar la clase.
6. Si la clase de Química ya ha empezado entonces llego tarde.
7. Una parte de la Luna no se ve desde la Tierra.
8. O Antonio irá al teatro o irá al cine.
9. Las rosas son rojas y las violetas son azules.
10. Si Brasil está en Sudamérica entonces está en el hemisferio Sur.

B. Traducir al lenguaje corriente las proposiciones siguientes en otras que tengan la misma forma. (Utilizar el mismo término de enlace y sustituir las letras con proposiciones atómicas.) Especificar cuál es la proposición atómica representada por cada una de las letras.

1. Si (**P**), entonces (**Q**)
2. (**R**) o (**S**)
3. (**P**) y (**Q**)
4. No (**E**)
5. Si (**S**), entonces (**B**)
6. No (**P**)
7. (**R**) y (**T**)
8. (**S**) o (**Q**)
9. No (**T**)
10. Si (**R**), entonces (**S**).

C. Cada una de las proposiciones siguientes es molecular. Primero indicar cuáles son el término o términos de enlace de cada proposición. Después escribir separadamente las proposiciones atómicas que se encuentran en cada una de las proposiciones moleculares.

1. Juan es el segundo y Tomás es el cuarto.
2. O Jaime es el ganador o Luis es el ganador.
3. José no es el ganador.
4. Si Tomás es el ganador entonces él tendrá la medalla.
5. Si Tomás no es el ganador entonces debe colocarse en segundo lugar.
6. Los Alpes son montañas jóvenes y los Appalaches son montañas viejas.
7. Las arañas no son insectos.
8. Si las arañas son insectos entonces han de tener seis patas.
9. Si un material se calienta entonces se dilata.
10. Muchos planetas son o demasiado cálidos para que vivan seres como nosotros o demasiado fríos para que vivan seres como nosotros.

D. Simbolizar las proposiciones matemáticas siguientes sustituyendo las proposiciones atómicas por letras mayúsculas. Recuérdese que $\neq$ es la negación de $=$.

1. Si $x=y$ entonces $x=2$.
2. Si $x\neq 2$ entonces $y>1$.
3. Si $x\neq 2$ o $x\neq 3$ entonces $x=1$.
4. Si $x+y=3$ entonces $y+x=3$.
5. Si $x-y=2$ entonces $y-x\neq 2$.
6. $x+y=2$ y $y=1$.
7. $x+y+z=2$ o $x+y=10$.
8. Si $x\neq y$ y $y\neq z$ entonces $x>z$.
9. Si $x+y>z$ y $z=1$ entonces $x+y>1$.
10. Si $x\neq y$, entonces $x\neq 1$ y $x\neq 2$.

1.5 *Los términos de enlace y sus símbolos*

Ahora que ya sabemos simbolizar proposiciones atómicas, el trabajar con proposiciones moleculares resulta mucho más fácil. Pero también se pueden utilizar símbolos para los mismos términos de enlace. Se considerará cada término de enlace por separado y se le asignará un símbolo. También se dará un nombre a la proposición molecular que se forme utilizando cada uno de los términos de enlace. Estos términos de enlace son tan importantes que se estudiarán por separado en las secciones siguientes, revisando algunas de las cuestiones ya analizadas.

Y. La unión de dos proposiciones con la palabra «y», se denomina *conjunción* de las dos proposiciones. Un ejemplo de una conjunción es esta proposición:

Sus ojos son azules y los ojos de su hermano también son azules.

Sea **P** la proposición atómica «Sus ojos son azules» y sea **Q** la proposición atómica «Los ojos de su hermano también son azules». Entonces se puede simbolizar la proposición molecular, que es una conjunción, por

(**P**) y (**Q**).

Una conjunción es un tipo de proposición molecular. La proposición molecular es la conjunción de la proposición atómica **P** y la proposición atómica **Q**. Es también útil introducir un símbolo para «y». Nosotros usaremos el símbolo que se encuentra en la mayoría de las máquinas de escribir:

&.

Utilizando este símbolo, se puede escribir la conjunción de dos proposiciones **P** y **Q** de la forma:

(**P**) &. (**Q**).

Recuérdese que el símbolo & sustituye al término de enlace completo tanto si se refiere a «y» como si es «a la vez... y...» en lengua castellana.

EJERCICIO 4

A. Simbolizar las proposiciones siguientes, completamente, utilizando el símbolo lógico correspondiente para los términos de enlace. Indicar la proposición atómica que corresponde a cada letra.

1. Juan vive en nuestra calle y Pedro en la manzana contigua.
2. Los discos antiguos de José son buenos pero los modernos son todavía mejores.

3. Metió la nariz y ya sacó tajada.
4. El sol desaparece detrás de las nubes y en seguida empieza a refrescar.
5. El reactor se elevaba a nuestra vista y dejaba tras sí una fina estela blanca.
6. Juana tiene trece años y Rosa quince.
7. Jorge es alto y Andy es bajo.
8. La estrella de mar es un equinodermo y los erizos de mar son también equinodermos.
9. Hoy es día treinta y mañana será primero.
10. El juego ha empezado y llegaremos tarde.

B. Terminar la simbolización de las proposiciones que siguen sustituyendo el término de enlace por el correspondiente símbolo lógico.

1. (**P**) y (**Q**)
2. A la vez (**A**) y (**B**)
3. (**H**) y (**K**)
4. A la vez (**T**) y (**G**)
5. (**S**) y (**Q**)

C. Traducir al lenguaje corriente las poposiciones siguientes. Es decir, se han de sustituir las letras por proposiciones en lengua castellana y el símbolo lógico por el término de enlace correspondiente.

1. (**P**) & (**Q**)
2. (**R**) & (**S**)
3. (**T**) & (**C**)
4. (**B**) & (**H**)
5. (**Q**) & (**P**)

D. En las proposiciones matemáticas siguientes, simbolizar sólo el término de enlace «y».

1. $x=0$ y $y=4$.
2. $x\neq 0$ y $x+y=2$.
3. $x-x=0$ y $x+0=x$.
4. $x+y=y+x$ y $x+(y+z)=(x+y)+z$.

O La unión de dos proposiciones por medio de la palabra «o» se denomina *disjunción* de las dos proposiciones. Por ejemplo:

Ésta es el aula cuatro o es una aula de Física,

es la *disjunción* de dos proposiciones. Una disjunción es una proposición molecular formada por el término de enlace «o». La proposición antes escrita puede parecer un poco rara. Probablemente esto es debido a que en el lenguaje corriente se incluye la palabra «o» inicial junto con la palabra «o» central. Por ejemplo, se podría leer la proposición molecular considerada en la forma:

O ésta es el aula cuatro o es una aula de Física.

En ambos casos, las dos proposiciones atómicas son las mismas; primero, la proposición «Ésta es el aula cuatro», y segundo «Ésta es una aula de Física». Es decir, no debe incurrirse en el error de incluir la «o» inicial como parte de la primera proposición. Se trata de una parte del término de enlace.

El símbolo que utilizaremos para la disjunción es: $\vee$.

En el ejemplo precedente, si **F** es la proposición «Ésta es el aula cuatro» y **R** es la proposición «Ésta es una aula de Física», entonces la disjunción queda completamente simbolizada por:

$$(\mathbf{F}) \vee (\mathbf{R}).$$

Leeremos esta proposición diciendo (**F**) *o* (**R**), y algunas veces también *o* (**F**) *o* (**R**). Recuérdese que el símbolo $\vee$ representa el término de enlace completo, tanto si en la lectura o escritura de la proposición se emplea sólo «o» o bien «o..., o...».

Ejercicio 5

A. Simbolizar completamente las proposiciones siguientes, utilizando el símbolo que corresponde a cada término de enlace. Indicar la proposición atómica sustituida por cada letra.

1. El área del triángulo *ABC* es igual al área del triángulo *DEF,* o el área del triángulo *ABC* es menor que el área del triángulo *DEF.*
2. Tomará parte en el salto de altura o correrá media milla.
3. O tomará parte en la representación o ayudará en el vestuario.
4. O el bote cruzó la barra o se lo tragaron las olas.
5. Hemos de llegar allí antes, u otro recibirá el empleo.
6. O la aguja está gastada o la grabación es mala.
7. O Juan será reelegido o destinado para un puesto nuevo.
8. Se puede dar el vector por medio de dos componentes, o estamos en tres dimensiones.

9. Peces con pulmones pueden tomar el oxígeno del aire o pueden tomar el oxígeno del agua.
10. O una anémona es un animal o es una planta.

B. Acabar de simbolizar las proposiciones siguientes sustituyendo el término de enlace por su signo correspondiente.

1. (P) o (Q)
2. O (P) o (Q)
3. O (R) o (S)
4. (T) o (E)
5. O (P) o (N)

C. Traducir al lenguaje corriente las proposiciones siguientes en otras de la misma forma:

1. (P) $\vee$ (Q)
2. (R) $\vee$ (S)
3. (G) $\vee$ (H)
4. (R) $\vee$ (Q)
5. (A) $\vee$ (E)

D. Simbolizar las proposiciones matemáticas siguientes utilizando los símbolos & y $\vee$, pero conservando los símbolos matemáticos.

1. O $x=0$ o $x>0$.
2. $x\neq 0$ y $y\neq 0$.
3. O $x>1$ o $x+y=0$.
4. O $y=x$ o $y\neq x$.
5. $y+x>y+x+z$ o $z=0$.
6. $y+z=z+y$ y $0+x=x$.

E. Simbolizar las proposiciones matemáticas siguientes utilizando & y $\vee$, pero conservando los símbolos matemáticos y los paréntesis.

1. O $(x+y=0$ y $z>0)$ o $z=0$.
2. $x=0$ y $(y+z>x$ o $z=0)$.
3. O $x\neq 0$ o $(x=0$ y $y>0)$.
4. O $(x=y$ y $z=w)$ o $(x<y$ y $z=0)$.

No. Cuando a una proposición se le añade el término de enlace «no», el resultado se denomina la ***negación*** de la proposición. Así, una negación es una proposición molecular que utiliza el término de enlace «no». El término de enlace «no» es análogo a los otros términos de enlace, puesto que forma proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas. Pero es distinto de los otros términos de enlace pues se usa con una *sola* proposición. La palabra «no» en el lenguaje corriente se acostumbra a encontrar dentro de la proposición. Sin embargo, en Lógica, nos acostumbraremos a considerar el término de enlace separado de la proposición sobre la que actúa. Esto es necesario para poder representar la negación por un símbolo lógico.

Un ejemplo de negación es la proposición:

Las elecciones presidenciales no siempre terminan con armonía.

A pesar de que parece una proposición atómica por contener una sola proposición, no lo es. Es la negación de la proposición atómica:

Las elecciones presidenciales sismpre terminan con armonía.

En Lógica la adición del término de enlace «no» a una proposición atómica da lugar a una proposición molecular. Como en el lenguaje corriente se acostumbra a hacer la negación colocando la palabra «no» *dentro* de la proposición atómica, es fácil cometer el error de olvidar la colocación de «no» delante de la letra mayúscula elegida para simbolizar la proposición atómica. La forma correcta de simbolizar la proposición, «Las elecciones presidenciales no siempre terminan con armonía» sería la siguiente:

Sea

P =«Las elecciones presidenciales siempre terminan en armonía»

entonces la proposición se indica como sigue:

No (**P**).

Para simbolizar completamente la proposición, emplearemos un símbolo para la negación:

$\neg$.

La proposición del ejemplo anterior, totalmente simbolizada, será:

$\neg$(**P**).

A veces es más fácil traducir estas proposiciones al castellano empezando con la frase «No ocurre que», por lo que se puede considerar el símbolo $\neg$ como equivalente a «no ocurre que». Por ejemplo, para traducir al castellano la proposición $\neg$(**P**) sobre elecciones presidenciales, se puede decir: «No siempre ocurre que las elecciones presidenciales terminen con armonía».

Los términos de enlace se pueden utilizar con una o más proposiciones moleculares, de la misma manera que con las atómicas. Por ejemplo, en la forma «*Si* ( ) *entonces* ( )», se pueden llenar los espacios vacíos con proposiciones atómicas o con proposiciones moleculares. Las negaciones se combinan frecuentemente con otras proposiciones para formar una proposición molecular más larga. Por ejemplo,

Si un número es mayor que 0, entonces no es un número negativo

es una proposición molecular de la forma «si..., entonces...» en la que el término de enlace une una proposición atómica y una negación. La forma, «O ( ) o ( )» puede incluir negaciones como en la siguiente disjunción:

O el juego no ha empezado o el público no es numeroso.

Aquí se tiene una disjunción de dos proposiciones moleculares, ambas negaciones. Se simboliza esta proposición de la misma manera que se simbolizan otras proposiciones moleculares. En primer lugar, su forma lógica se puede presentar con mayor claridad poniendo paréntesis en la proposición escrita:

(O el juego no ha empezado) o (el público no es numeroso).

Elegida una letra mayúscula para cada proposición atómica se expresa su negación poniendo el símbolo $\neg$ delante de la letra. Después, se enlazan las dos proposiciones moleculares por el término de enlace dominante, que en este caso es el término de enlace «o». La proposición completamente simbolizada se presenta en la forma

$$(\neg S) \vee (\neg C).$$

Ejercicio 6

A. Simbolizar completamente las proposiciones siguientes, utilizando los símbolos correspondientes a cada término de enlace. Indicar las proposiciones atómicas sustituidas por cada letra mayúscula.

1. En el hemisferio Sur, Julio no es un mes de verano.
2. Los tubos de neón no son incandescentes.
3. No ocurre que a todos los ingresos les correspondan impuestos proporcionales.

4. Marte no está tan cercano al Sol como la Tierra.
5. Texas no es el mayor estado en los Estados Unidos.
6. No ocurre que todos los líquidos hiervan a la misma temperatura.
7. John Quincy Adams no fue el segundo Presidente de los Estados Unidos.
8. No todos los gérmenes son bacterias.
9. No ocurre que la ortiga de mar sea una planta.
10. Luisa no es una persona alta.

B. Simbolizar las proposiciones siguientes utilizando el símbolo correspondiente para cada término de enlace.

1. No ocurre que (R)
2. No (Q)
3. No (H)
4. No ocurre que (T)
5. No (J)

C. En las proposiciones siguientes se utiliza más de un término de enlace. Simbolizar completamente las proposiciones sustituyendo los términos de enlace por los símbolos correspondientes.

1. (P) y no (Q)
2. No (R) y no (M)
3. (S) o no (B)
4. O no (P) o no (Q)
5. (T) y no (R)

D. Primero señalar cada término de enlace en las proposiciones que siguen. Después, simbolizar la proposición entera sustituyendo P = «Jaime es puntual» y Q = «Tom llega tarde» en las cinco proposiciones.

1. O Jaime es puntual o Tom llega tarde.
2. O Jaime no es puntual o Tom llega tarde.
3. Tom llega tarde y Jaime no es puntual.
4. Tom no llega tarde y Jaime no es puntual.
5. Jaime no es puntual y Tom llega tarde.

E. Identificar cada una de las proposiciones moleculares siguientes escribiendo la palabra que denota su forma (por ejemplo, «negación», «conjunción», «disjunción»).

1. $\neg(Q)$
2. $(P)\ \&\ (Q)$
3. $\neg(R)$
4. $(R) \vee (S)$
5. $(R)\ \&\ (S)$
6. $\neg(T)$
7. $(P) \vee (Q)$
8. $(R)\ \&\ (T)$
9. $\neg(S)$
10. $(T) \vee (Q)$

F. Examinar las proposiciones siguientes y señalar cada término de enlace que se encuentre en ellas.

1. No es mediodía y el almuerzo no está listo.
2. Si no estamos allí, entonces perderemos nuestro voto.
3. Si dos números no son iguales, entonces uno es mayor que el otro.
4. María se ha ido o no está en su sitio.
5. Si es negro, entonces no reflejará la luz.
6. $x>0$ o $x=0$.
7. Si $x+y=z$, entonces $y+x=z$.
8. Si $x+y=0$ y $x>0$, entonces $y<0$.
9. Si $x+y=0$ y $x=0$, entonces $y=0$.
10. O $x=0$ o $x\neq 0$.

Si..., entonces.... Cuando se unen dos proposiciones mediante las palabras «si..., entonces...», la proposición molecular resultante se denomina una *proposición condicional.* Ya se dijo que la manera de escribir el término de enlace «si..., entonces...» da idea de la forma de la proposición condicional. En vez de los puntos se puede poner cualquier proposición. La palabra «si» precede a la primera proposición y la palabra «entonces» precede a la segunda proposición.

Un ejemplo de una proposición condicional es:

Si llueve hoy, entonces se suspende el picnic.

La primera proposición atómica es «Llueve hoy» y la segunda proposición atómica es «Se suspende el picnic». Para poder simbolizar completamente esta proposición condicional emplearemos el símbolo siguiente para el término de enlace:

$$\rightarrow.$$

Ahora ya podemos simbolizar la proposición considerada de la manera siguiente. Primero se escogen letras mayúsculas para las proposiciones atómicas: Sea

P = «Hoy llueve»
Q = «Se suspende el picnic»,

y entonces se sustituye el término de enlace por el símbolo:

$$(\mathbf{P}) \rightarrow (\mathbf{Q}).$$

Hay algunas denominaciones que se introducen en Lógica para las partes de una proposición condicional. La proposición situada entre la palabra «si» y la palabra «entonces» es el *antecedente*. La proposición que sigue a la palabra «entonces» es el *consecuente*. Estos términos se utilizarán con frecuencia cuando se trabaje con proposiciones condicionales.

Ejercicio 7

A. Simbolizar las proposiciones siguientes, utilizando los símbolos correspondientes para los términos de enlace. Señalar la proposición atómica representada por cada letra mayúscula.

1. Si hace suficiente frío, entonces el lago se helará.
2. Si las luces están encendidas, entonces la familia Álvarez está en casa.
3. Si dos pulsaciones se atraviesan, continúan conservando la forma original.
4. Si pierde usted el autobús, entonces tendrá que andar.
5. Si usted se dirige hacia el norte, entonces llegará a Canadá mañana.
6. Si es un ácido, entonces contiene el elemento hidrógeno.
7. Si dos y tres son cinco, entonces tres y dos son cinco.
8. Si x es igual a dos, entonces x más uno es igual a tres.
9. Si hoy es siete, entonces el viernes es nueve.
10. Si su producción crece, entonces Juan podrá estabilizar el precio.

B. Examinar las proposiciones condicionales siguientes y señalar en cada una el antecedente.

1. Si Juana es más joven entonces Antonia es más vieja.
2. Si Antonia es más vieja entonces Luisa es más joven.
3. Si Juana es más joven entonces Rosa es más vieja.
4. Si Rosa es más vieja entonces tiene sesenta años.
5. Si Rosa tiene sesenta años entonces Luisa tiene sesenta años.

C. Examinar las proposiciones condicionales siguientes y señalar en cada una el consecuente.

1. Si Pedro es el segundo entonces Juan es el tercero.
2. Si Juan es el tercero entonces precede a Luis.
3. Si Luis es el cuarto entonces Carlos es el quinto.
4. Si Pedro es el segundo entonces está después de Marcos.
5. Si Pedro está después de Marcos entonces Marcos es el primero.

D. Simbolizar completamente las proposiciones siguientes, sustituyendo los términos de enlace por los correspondientes símbolos lógicos.

1. Si (P) entonces (R)
2. Si (S) entonces (T)
3. Si (Q) entonces (P)
4. Si (P) entonces no (S)
5. Si no (S) entonces no (T)

E. Identificar las proposiciones condicionales de entre las proposiciones que siguen, poniendo una C después de cada proposición de esta forma.

1. (P) $\vee$ $\neg$(Q)
2. (P) $\rightarrow$ $\neg$(Q)
3. (R) $\rightarrow$ (S)
4. (T) & (S)
5. (T) & $\neg$(S)
6. (T) $\rightarrow$ (S)
7. (R) $\vee$ (P)
8. (R) $\rightarrow$ (P)
9. (Q) $\rightarrow$ (S)
10. (R) & (T)

● 1.6 *Agrupamiento y paréntesis*

Hemos visto que es frecuente encontrar proposiciones que tienen más de un término de enlace. Los términos de enlace pueden unir o pueden ser usados con proposiciones moleculares de la misma forma que con las proposiciones atómicas. En todos estos casos uno de los términos de enlace es el *mayor*. Por esto se le denominará *dominante* porque es el que actúa sobre toda la proposición.

Recuérdese que uno de los tipos de proposición molecular era de la forma:

( ) & ( ).

Ésta es una conjunción y los espacios se pueden llenar ya sea con proposiciones atómicas o moleculares. Pero, si se utilizan proposiciones moleculares, éstas a su vez contienen otros términos de enlace; sin embargo, la & se mantiene como término de enlace dominante o mayor. Sea, por ejemplo, la conjunción de dos negaciones, como en la proposición:

Antonio no estudia en la Universidad y Ana no estudia en la Universidad.

Si se designa por **T** la proposición «Antonio estudia en la Universidad» y por **A** la proposición «Ana estudia en la Universidad», las proposiciones que se colocarían en los paréntesis de la forma anterior, serían $\neg$**T** y $\neg$**A**, y se obtendría.

($\neg$T) & ($\neg$A).

Considérese una conjunción cuyo primer miembro sea a su vez una disjunción y cuyo segundo miembro sea una proposición atómica. El término de enlace «y» enlazará una proposición molecular formada utilizando «o» con una proposición atómica.

A la vez, $x=1$ o $x=2$, y $y=3$.

Sea **P** = '$x=1$', **Q** = '$x=2$', y **R** = '$y=3$'; entonces la disjunción es (**P**) ∨ (**Q**) y la proposición atómica es **R**. Si estas proposiciones se colocan en los espacios correspondientes de una conjunción, el resultado es:

((**P**) ∨ (**Q**)) & (**R**).

Esta proposición con tantos paréntesis es difícil de leer. Para mayor facilidad se adopta el siguiente convenio: *una proposición que no contenga* &, ∨ , *ni* →, *no necesita colocarse entre paréntesis.* En consecuencia, en la proposición anterior se pueden suprimir los paréntesis que encierran la «**P**» y la «**Q**», resultando la forma simbólica siguiente:

(**P** ∨ **Q**) & (**R**).

y puesto que «**R**» tampoco contiene ni &, ni ∨, ni →, la proposición se reduce a:

(**P** ∨ **Q**) & **R**.

Se puede ver rápidamente que se trata de una conjunción. El término de enlace «y», une dos proposiciones. Una es la proposición atómica **R**; la otra es una proposición molecular, la disjunción, **P** ∨ **Q**.

Los paréntesis son los símbolos de puntuación de la lógica. Muestran como está agrupada una proposición y, por tanto, señalan cuál es el término de enlace dominante. Un paréntesis que encierre **P** ∨ **Q**, muestra que las partes están ligadas constituyendo una proposición única. La proposición molecular se puede unir a alguna otra por medio de un término de enlace, de manera análoga a como se uniría una proposición atómica.

Obsérvese que en las proposiciones en lengua castellana simbolizadas anteriormente, se logra el mismo objetivo por medio de la coma. Pero, supóngase que la proposición se leyera

$x=1$, o $x=2$ y $y=3$.

En este caso la coma expresa que el término de enlace dominante es «o». Como la forma de la disjunción es

$$(\quad) \vee (\quad)$$

se llenarán los espacios con una proposición atómica y una conjunción:

$$(\mathbf{P}) \vee (\mathbf{Q} \;\&\; \mathbf{R}).$$

Obsérvese que prescindiendo de los paréntesis, las dos proposiciones simbolizadas se presentarían igual. Por las razones dadas anteriormente no es necesario el paréntesis que encierra la proposición atómica; por tanto, la proposición en la forma final es

$$\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \;\&\; \mathbf{R}).$$

Cuando se simbolizan proposiciones en lengua castellana, se precisa alguna manera de destacar el término de enlace dominante en la proposición. Así como en Lógica el paréntesis señala siempre de manera muy clara cuál es el término de enlace dominante, en las proposiciones escritas en castellano no siempre es tan claro, pues existen diversos métodos para indicar la dominancia. Un método, según se ha visto es el uso de las comas.

El método más claro de poner de manifiesto la dominancia de un término de enlace es usar el término en la forma gramatical más completa, ordinariamente compuesto de dos partes. una de las cuales se escribe al principio de la proposición molecular:

A la vez (   ) y (   ).
O (   ) o (   ).
Si (   ) entonces (   ).

Por ejemplo, considérese la proposición:

(1) O él está equivocado y yo tengo razón, o quedaré sorprendido.

Poniendo los paréntesis se tiene:

O (él está equivocado y yo tengo razón) o (quedaré sorprendido).

Los paréntesis señalan claramente que las palabras «O» y «o» envuelven la conjunción «él está equivocado y yo tengo razón» que es precisamente una parte de toda la disjunción. Así la proposición (1) se puede simbolizar:

(2) $(W \ \& \ R) \lor S.$

Por otra parte, si el paréntesis se coloca de manera que la & quede fuera, entonces ésta dominará y la proposición completa se transforma en una conjunción,

(3) $W \ \& \ (R \lor S).$

La expresión en castellano sería:

(4) El está equivocado, y o yo tengo razón o quedaré sorprendido.

Obsérvese la diferente colocación de la palabra «o» en las dos proposiciones (1) y (4). Si «o» se presenta antes de la disjunción domina como en (1) y (2); si se presenta después de la disjunción no domina como en (3) y (4).

Es posible introducir el «a la vez» acompañado al «y». Poniendo paréntesis con el fin de que se vea la forma claramente, la proposición (1) sería:

(5) O (a la vez él está equivocado y yo tengo razón) o (quedaré sorprendido);

es decir, es claramente una disjunción simbolizada por la fórmula (2). La proposición (4) con paréntesis sería:

(6) A la vez (él está equivocado) y (o yo tengo razón o quedaré sorprendido),

que es manifiestamente una proposición simbolizada por la fórmula (3).

El escribir reiteradamente el «a la vez» y el «o» iniciales, da lugar a un lenguaje poco elegante, por lo que no se suelen incluir, pero sin duda se pierde en claridad lógica. Cuando se utilizan estos términos, la primera palabra de la proposición indica ya el tipo de proposición lógica de que se trata: «a la vez» indica que es una conjunción formada con «a la vez... y...» como dominante, «o» indica que es una disjunción formada con «o...o...» como dominante, y «si» indica que es una condicional formada con «si..., entonces...» como dominante. Para que la frase en castellano suene mejor se suprimen a veces las palabras «o», «a la vez» y «entonces» y la proposición puede seguir teniendo el mismo significado. Sin embargo, desgraciadamente se suprimen también algunas veces que son necesarias, siendo entonces imposible decidir cuál es el verdadero significado de la proposición. Así resultan casos ambiguos como:

(7) Él está equivocado y yo tengo razón o quedaré sorprendido.

No se puede asegurar si (7) es una conjunción o una disjunción.

Ejercicio 8

Copiar las proposiciones (1), (4), (5), (6) y (7), e intentar en cada una de ellas poner los paréntesis en distintos sitios. No se puede hacer en (1), (4), (5) y (6), pero se puede hacer en (7). Lo que indica que (1), (4), (5) y (6) son claras con un solo significado, mientras que (7) es ambigua por tener más de un significado posible.

Cuando se tienen que traducir proposiciones matemáticas en símbolos lógicos, se pueden utilizar los mismos métodos. Por ejemplo, compárense las proposiciones (8) y (9).

(8) A la vez x es mayor que 1 o x es menor que 1 y x es menor que 0.

(9) x es mayor que 1 o a la vez x es menor que 1 y x es menor que 0.

Ambas proposiciones se pueden simbolizar poniendo:

P = «x es mayor que 1»
Q = «x es menor que 1»
R = «x es menor que 0».

Sin embargo, (8) se simboliza

(10) $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})\ \&\ \mathbf{R}$

y (9) se simboliza

$$\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q}\ \&\ \mathbf{R}).$$

Póngase paréntesis en las proposiciones en lenguaje corriente. si son necesarios, para que la forma resulte clara. Obsérvese una vez más que los paréntesis encierran la proposición molecular que *no* tiene el término de enlace dominante. El término de enlace dominante queda *fuera* del paréntesis.

El uso cuidadoso y exacto de los paréntesis en Lógica es muy importante, pues la proposición $(P \vee Q) \& R$ es distinta de la proposición $P \vee (Q \& R)$. Los paréntesis se requieren para indicar cuál es el término de enlace dominante en cada proposición.

EJERCICIO 9

A. Cada una de las proposiciones simbolizadas siguientes es una *conjunción,* por lo que el término de enlace mayor o dominante es «y». Poner los paréntesis adecuadamente para indicar que «y» es dominante.

1. $P \vee Q \& S$
2. $Q \vee R \& S$
3. $Q \& R \vee T$
4. $P \vee R \& Q$
5. $R \& P \vee T$

B. Cada una de las proposiciones siguientes es una *disjunción.* Poner los paréntesis adecuadamente para indicar que en este caso el término de enlace dominante es «o».

1. $P \vee Q \& S$
2. $Q \vee R \& S$
3. $Q \& R \vee T$
4. $P \& Q \vee R$
5. $P \vee Q \& R$

C. De cada una de las proposiciones siguientes se dice si es una conjunción o una disjunción. Indicar el agrupamiento adecuado de las proposiciones atómicas poniendo paréntesis que señalen cuál es el término de enlace dominante.

1. disjunción	$S \vee T \& R$
2. conjunción	$T \vee S \& Q$
3. conjunción	$T \& S \vee R$
4. disjunción	$P \vee Q \& T$
5. disjunción	$P \& Q \vee R$

D. Simbolizar las proposiciones siguientes, indicando el agrupamiento por medio de paréntesis cuando sea necesario.

1. O Pedro es presidente y Juan es tesorero, o Jaime es tesorero.

2. Pedro es presidente, y o Juan es tesorero, o Jaime es tesorero.
3. O Ramón es su hermano y Rosa es su hermana o Javier es su hermano.
4. Ramón es su hermano y o Rosa es su hermana o Javier es su hermano.
5. Jorge es el capitán o José es el capitán, y Carlos es el teniente.
6. A la vez el resultado es un número primo o María está equivocada y Rafael está equivocado también.

E. Simbolizar las proposiciones matemáticas siguientes, eligiendo letras atómicas para sustituir las proposiciones matemáticas atómicas.

1. Si x es menor que 2, entonces x es igual a 1 o x es igual a 0.
2. Si a la vez x es menor que tres y x es mayor que uno entonces x es igual a dos.
3. $y=4$ y si $x<y$ entonces $x<5$.
4. O x es mayor que cinco y x es menor que siete o x no es igual a seis.
5. Si $x+3>5$ y $y-4>$ entonces $y>6$.

F. Simbolizar las cinco proposiciones matemáticas de **E** utilizando los símbolos lógicos para los términos de enlace y símbolos matemáticos para las proposiciones matemáticas atómicas.

Se considera ahora la proposición

> Si este cuadro es negro entonces aquel cuadro es rojo y su rey está sobre el cuadro rojo.

Para simbolizar esta proposición molecular se pone

P = «Este cuadro es negro»
Q = «Este cuadro es rojo»
R = «Su rey está sobre el cuadro rojo».

La proposición simbolizada es

$$\mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{Q} \ \& \ \mathbf{R}).$$

La proposición es una proposición condicional en la que el *consecuente* (la proposición que sigue a «entonces») es una conjunción. El término de dominante es «si..., entonces...».

¿Cómo se podría cambiar el ejemplo de manera que el término de enlace «y» fuera el dominante? En castellano se puede lograr insertando una coma:

> Si este cuadro es negro entonces aquel cuadro es rojo,
> y su rey está sobre el cuadro rojo.

Se puede, si se desea, evitar la coma utilizando la palabra «a la vez» como parte del término de enlace dominante.

> A la vez si este cuadro es negro entonces aquel cuadro
> es rojo y su rey está sobre el cuadro rojo.

Para señalar que & es el término de enlace en la proposición simbolizada, se cambia la posición del paréntesis,

$$(P \rightarrow Q)\ \&\ R.$$

EJERCICIO 10

A. Junto a cada proposición molecular escrita a continuación, se ha puesto el nombre del tipo de proposición molecular a la que pertenece. Añadir los paréntesis necesarios.

1. condicional	$P \rightarrow R\ \&\ S$
2. condicional	$P \rightarrow Q \vee R$
3. condicional	$P\ \&\ Q \rightarrow R$
4. condicional	$R \vee P \rightarrow Q$
5. conjunción	$P \rightarrow Q\ \&\ S$
6. conjunción	$R\ \&\ P \rightarrow Q$
7. disjunción	$R \vee Q \rightarrow T$
8. disjunción	$Q \rightarrow P \vee S$
9. disjunción	$P \rightarrow R \vee Q$
10. condicional	$P \rightarrow R \vee Q$
11. conjunción	$P\ \&\ Q \rightarrow T$
12. condicional	$P\ \&\ Q \rightarrow T$
13. disjunción	$P \vee T \rightarrow Q$
14. disjunción	$Q \rightarrow R \vee \neg S$
15. condicional	$Q \rightarrow R \vee \neg S$

B. Simbolizar las proposiciones siguientes, indicando el agrupamiento por paréntesis si es necesario. Para todas las proposiciones, sea

$J =$ «Juan está en la clase 1»
$C =$ «Él está en la clase de Química»
$K =$ «Álvaro está en la clase 3».

1. Si Juan está en la clase 1, entonces Álvaro está en la clase 3 y él está en la clase de Química.
2. Si o Álvaro está en la clase 3 o él está en la clase de Química, entonces Juan está en la clase 1.
3. O si Juan está en la clase 1 entonces él está en la clase de Química, o Juan no está en la clase 1.
4. O Álvaro está en la clase 3 o si Jaime está en la clase 1 entonces él está en la clase de Química.
5. A la vez si Álvaro está en la clase 3, entonces él cstá en la clase de Química, y Juan no está en la clase 1.

La negación de una proposición molecular. Hay casos en los que se desea expresar la negación de una proposición molecular entera. Por ejemplo, se trata de negar una disjunción como en el caso siguiente:

No ocurre que el libro o es rojo o es verde.

Supóngase que se simboliza esta proposición poniendo primero **P** para designar la primera proposición atómica y **Q** para designar la segunda proposición atómica. La disjunción es entonces **P** $\vee$ **Q**. Luego, la forma simbolizada de la negación de una proposición es:

$$\neg(\quad).$$

Obsérvese el símbolo que denota la negación. Recuérdese que se puede negar cualquier proposición, ya sea atómica o molecular. Cualquier proposición se puede negar poniéndola primero entre paréntesis y luego colocando el símbolo de negación delante del paréntesis. Al simbolizar una proposición se debe tener en cuenta que el símbolo para la negación se aplica a la proposición completa más corta delante de la que está colocado.

Así, para negar la proposición **P** $\vee$ **Q**, se pone entre paréntesis con un símbolo de negación delante del paréntesis.

$$\neg(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}).$$

El agrupamiento entre paréntesis indica: (1) que la negación se refiere a toda la proposición (en este caso una disjunción) —no sólo a la proposición atómica más próxima—, y (2) que la negación es el término de enlace dominante. En este caso el término de enlace «no» domina al término de enlace «o».

Se pueden encontrar ejemplos en los que se nieguen otro tipo de proposiciones moleculares. Repetimos que también son necesarios paréntesis para indicar que lo que se niega es la proposición molecular completa y no sólo una parte de ella. Considérese la proposición

> No ocurre que a la vez Juan tenga una hermana
> y él tenga un hermano.

Aquí se quiere negar la proposición completa. Es decir, se desea manifestar que Juan no tiene a la vez un hermano y una hermana. Al simbolizar esta proposición, si se designa por **P** la primera proposición atómica y por **Q** la segunda proposición atómica, se tiene:

$$\neg(\mathbf{P} \ \& \ \mathbf{Q}).$$

Finalmente, se considera la negación de una condicional,

> No ocurre que si usted ve un gato negro
> entonces tendrá mala suerte.

Sea

P =«Usted ve un gato negro»
Q = «Usted tendrá mala suerte».

Simbolizado, este ejemplo se escribirá:

$$\neg(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}).$$

El agrupamiento entre paréntesis manifiesta claramente que lo que se ha negado es la proposición condicional completa y no simplemente el antecedente, proposición **P**.

Quizá la explicación más simple para el agrupamiento y el uso de los paréntesis en Lógica es que una proposición molecular encerrada entre paréntesis se presenta como una proposición atómica respecto a otros términos de enlace o a otras proposiciones con las que puede ligarse. Se trata como una proposición única. El término de enlace dominante está fuera del paréntesis.

EJERCICIO 11

A. En cada una de las proposiciones siguientes uno de los símbolos $\vee$, $\rightarrow$, o & domina. Por tanto, las proposiciones son disjunciones, condicionales, y conjunciones a pesar de empezar por una negación. Supóngase que se hubiera entendido que las negaciones iniciales dominan, convirtiendo todas las proposiciones en negaciones. Sin ningún cambio más que la adición de paréntesis, convertir cada proposición en una negación.

1. $\neg P \lor R$
2. $\neg R \to S$
3. $\neg P \ \& \ T$
4. $\neg P \to Q$
5. $\neg R \lor S$
6. $\neg\neg Q \ \& \ \neg S$

B. Dar la negación de cada una de las proposiciones siguientes añadiendo símbolos de negación, y paréntesis si es necesario.

1. $\neg S$
2. $P \lor T$
3. $\neg S \ \& \ \neg T$
4. $P \to R$
5. $Q \ \& \ R$
6. $\neg R$
7. $T \to \neg S$
8. $\neg N \lor M$
9. $\neg Q \to \neg T$
10. $\neg S \ \& \ P$
11. $P \lor \neg S$
12. $\neg Q$

C. Junto a cada una de las proposiciones que siguen, se da el nombre del tipo de proposición molecular a la que pertenece. Añadir los paréntesis necesarios.

1. negación	$\neg P \to R$
2. condicional	$\neg P \to R$
3. conjunción	$\neg P \ \& \ \neg R$
4. negación	$\neg R \ \& \ T$
5. condicional	$\neg P \to \neg Q$
6. negación	$\neg P \to \neg Q$
7. disjunción	$\neg Q \lor \neg R$
8. negación	$\neg T \lor S$
9. conjunción	$\neg S \ \& \ \neg Q$
10. negación	$\neg R \to S$

D. Simbolizar las proposiciones siguientes, indicando el agrupamiento por medio de paréntesis.

Sea

P = «Es jueves»
Q = «Sucedió en lunes».

1. O no es jueves o no sucedió en lunes.
2. Si no ocurre que sucedió en lunes, entonces es jueves.
3. No ocurre que o es jueves o que sucedió en lunes.
4. No sucedió en lunes y es jueves.
5. No ocurre que a la vez es jueves y que sucedió en lunes.

6. Si no sucedió en lunes entonces no es jueves.
7. No ocurre que si es jueves entonces sucedió en lunes.
8. O no es jueves o sucedió en lunes.
9. No es jueves y sucedió en lunes.
10. No ocurre que a la vez sucedió en lunes y es jueves.

E. Simbolizar las proposiciones siguientes tal como indica el ejemplo a continuación.

1. O Juan es el más pequeño y Pedro es el más alto o Pedro es el más bajo y Juan es el más grande.

   Ejemplo: Sea **P**=«Juan es el más pequeño»
   Q=«Pedro es el más alto»
   R=«Pedro es el más bajo»
   S=«Juan es el más grande».

   $$(\mathbf{P} \ \& \ \mathbf{Q}) \lor (\mathbf{R} \ \& \ \mathbf{S}).$$

2. Si una sustancia orgánica se descompone, entonces sus componentes se transforman en abono y fertilizan el suelo.
3. O yo estoy equivocado, o la pregunta número uno es cierta y la pregunta número dos es falsa.
4. A la vez yo estoy equivocado o la pregunta número uno es cierta, y la pregunta número dos es falsa.
5. O yo estoy equivocado y la pregunta número uno es cierta o la pregunta número dos es falsa.
6. No ocurre que, a la vez Juana sea su hermana y Rosa sea su hermana.
7. Juana no es su hermana y Rosa es su hermana.
8. Si se conoce el período del movimiento de la Luna y se sabe la distancia de la Tierra a la Luna, entonces se puede calcular la aceleración centrípeta de la Luna.
9. O sus deberes están terminados, o si no están terminados tendrá que hacerlos por la noche.
10. No todas las regiones de África tienen un clima cálido y húmedo y no toda el África ecuatorial es una tierra de vegetación espesa y exuberante.
11. Si son las diez entonces la sesión de la Asamblea General ha empezado, y ahora el reloj señala las diez.
12. No ocurre que, o estrellas muy lejanas presentan paralaje o aparecen en el telescopio como discos.

13. Si este mineral no es duro, entonces no está compuesto de cristales de cuarzo.
14. Si es después de las cinco, entonces la puerta está cerrada y yo no tengo la llave.
15. Si es después de las cinco entonces la puerta está cerrada y además, yo no tengo la llave.

F. En cada una de las proposiciones matemáticas siguientes se indica el tipo de proposición molecular que debe entenderse. Poner los paréntesis necesarios.

1. condicional	$x=0 \ \vee \ x=1 \ \rightarrow \ y=2$
2. disjunción	$x=0 \ \vee \ x\neq 0 \ \& \ y=z$
3. conjunción	$x=1 \ \vee \ x\neq 1 \ \& \ y\neq 3$
4. condicional	$x=y \ \rightarrow \ y\neq z \ \& \ y>5$
5. conjunción	$x=y \ \vee \ x=z \ \& \ y>3$
6. condicional	$x=y \ \& \ y=z \ \rightarrow \ x=z$
7. condicional	$x>y \ \& \ y>z \ \rightarrow \ x>z$

• 1.7 *Eliminación de algunos paréntesis*

Adoptando algunas reglas simples acerca de la *potencia* de los términos de enlace, se pueden eliminar algunos de los paréntesis en las proposiciones simbolizadas:

• REGLA 1

El $\rightarrow$ es más potente que los otros términos de enlace.

Utilizando la regla 1, en vez de

$$(\mathsf{P} \ \& \ \mathsf{Q}) \rightarrow \mathsf{R}$$

se puede escribir simplemente

$$\mathsf{P} \ \& \ \mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}$$

También, en vez de

$$\mathsf{P} \rightarrow (\mathsf{Q} \vee \mathsf{R})$$

se puede escribir

$$\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q} \vee \mathsf{R}.$$

Por otra parte, si se tiene

$$(\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}) \vee \mathsf{R},$$

no se puede eliminar el paréntesis, pues es necesario para indicar que $\vee$ es el término de enlace dominante. También, si una proposición tiene dos condicionales, se tiene que utilizar el paréntesis para indicar cuál es dominante. Así, la proposición

$$A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

tiene significado distinto de

$$(A \rightarrow B) \rightarrow C.$$

La segunda regla es tan natural que se ha hecho uso de ella sin haberla enunciado explícitamente.

● REGLA 2

El signo de negación $\neg$ es más débil que cualquiera de los otros tres términos de enlace.

Utilizando la regla 2, en vez de

$$(\neg P) \ \& \ Q$$

se escribe

$$\neg P \ \& \ Q,$$

o, en vez de

$$P \vee (\neg Q)$$

se escribe

$$P \vee \neg Q,$$

o, en vez de

$$(\neg P) \rightarrow (\neg Q)$$

se puede escribir:

$$\neg P \rightarrow \neg Q.$$

Pero el paréntesis es necesario en

$$\neg(P \ \& \ Q).$$

Finalmente, puesto que & y $\vee$ son igualmente fuertes, cuando se presentan ambos en una proposición se tienen que poner siempre los paréntesis para indicar cuál es el término de enlace dominante. Así, el significado de:

$$P \vee Q \& R$$

no es claro; pues

$$(P \vee Q) \& R$$

es una conjunción, y

$$P \vee (Q \& R)$$

es una disjunción.

EJERCICIO 12

A. Junto a cada una de las proposiciones siguientes se indica el tipo de proposición molecular al que pertenece. Utilizando las reglas de prioridad establecidas sobre la potencia de los símbolos, añadir los paréntesis *sólo* donde sean necesarios.

1.	condicional	$P \rightarrow Q \vee R$
2.	disjunción	$P \vee Q \& R$
3.	conjunción	$R \rightarrow S \& T$
4.	negación	$\neg R \& S$
5.	condicional	$P \vee Q \rightarrow \neg R$
6.	negación	$\neg P \rightarrow Q$
7.	conjunción	$A \& B \rightarrow C$
8.	disjunción	$M \rightarrow N \vee P$
9.	negación	$\neg P \vee \neg Q$
10.	conjunción	$\neg A \vee \neg B \& \neg C$

B. Junto a cada una de las proposiciones matemáticas siguientes se indica el tipo de proposición molecular al que pertenecen. Utilizando las reglas de prioridad establecidas sobre la potencia de los símbolos, añadir los paréntesis *sólo* donde sean necesarios.

1.	conjunción	$x \neq 0 \vee x > y \& y = z$
2.	condicional	$x = 0 \rightarrow x > y \& y \neq z$
3.	disjunción	$x = 0 \vee x \neq 0 \& y = z$
4.	condicional	$x > y \& y > z \rightarrow x > z$
5.	disjunción	$x = 0 \vee x > 0 \rightarrow y = 0$
6.	conjunción	$x = y \& y = z \vee x = z$
7.	condicional	$x = y \& y = z \rightarrow x = z$
8.	conjunción	$x = y \vee x = z \& y \neq z$

C. Simbolizar las proposiciones del Ejercicio 11, Sección **E**, utilizando paréntesis *sólo* donde sean necesarios.

● 1 8 *Resumen*

Para poder simbolizar proposiciones en Lógica es preciso saber distinguir las partes lógicas de estas proposiciones. Una proposición molecular está formada por una proposición atómica más un término de enlace, por lo menos. Una proposición atómica es aquella que no posee ningún término de enlace. «Términos de enlace de proposiciones» (o simplemente «términos de enlace») es el nombre que en Lógica se da a términos tales como «a la vez... y...», «o... o...», «si... entonces...» y «no» que se utilizan para formar proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas.

De los cuatro términos de enlace indicados, «y», «o», y «si... entonces...» ligan o actúan sobre dos proposiciones a la vez, mientras que el término de enlace «no» actúa sólo sobre una. Una proposición molecular formada utilizando el término de enlace «y» es una «conjunción», una proposición molecular formada utilizando el término de enlace «o» es una «disjunción», una proposición molecular formada utilizando el término de enlace «no» es una «negación», y una proposición molecular formada utilizando el término de enlace «si... entonces...» es una proposición «condicional».

Es conveniente en Lógica utilizar unos símbolos para proposiciones y otros para términos de enlace. Para proposiciones atómicas se usan letras mayúsculas tales como «**P**», «**Q**», «**R**», «**S**», y así sucesivamente. Puesto que los términos de enlace determinan la forma de una proposición en Lógica, se puede sustituir cada proposición atómica por otra cualquiera y la forma se conserva. Por ejemplo, en la proposición **P** & **Q** se pueden sustituir **P** y **Q** por proposiciones escritas cualesquiera. Los símbolos utilizados para los términos de enlace, por otra parte, permanecen siempre los mismos; y son: & para conjunción, $\vee$ para disjunción, $\neg$ para negación, y $\longrightarrow$ para la condición.

En proposiciones que tiene más de un término de enlace es preciso indicar la manera de agruparse, pues distintas agrupaciones pueden tener distintos significados. En lengua castellana, las agrupaciones se presentan de acuerdo con la colocación de ciertas palabras, o mediante la puntuación. En Lógica la agrupación se expresa por paréntesis. La conjunción (**P** $\vee$ **Q**) & **R** tiene distinto significado que la disjunción **P** $\vee$ (**Q** & **R**), a pesar de tener las mismas proposiciones atómicas y los mismos términos de enlace. Se necesitan los paréntesis para indicar cuándo un término de enlace domina la proposición, si no es el término de enlace más fuerte en la proposición. «No» es el más débil; después siguen «y» y «o» que tienen la misma potencia; y «si... entonces...» es el más fuerte. Sin embargo, cada término de enlace puede dominar, si lo indica el paréntesis.

Con estos símbolos como instrumentos estamos ahora preparados para expresar de manera clara y precisa el significado de las proposiciones, salvo algunas, que se presentan dentro de la parte de la Lógica formal elemental conocida por Lógica proposicional.

EJERCICIO 13

Ejercicios de repaso

A. Poner una «A» después de cada proposición atómica y una «M» después de cada proposición molecular. Después de cada proposición molecular escribir el término de enlace utilizado en aquella proposición.

1. El tiempo atmosférico es la situación de la atmósfera en un momento particular y el clima es la variación de la situación del tiempo atmosférico en un período largo de tiempo.
2. Las bacterias en el agua o se destruyen hirviendo el agua o se destruyen por clorización.
3. Este libro tiene más páginas que aquel otro.
4. Si la sentencia es contra el defensor, entonces él apelará el caso.
5. Él reconoció la obra como de un poeta inglés del siglo diecinueve.
6. La guerra no puede explicarse totalmente por una causa.
7. Un elemento tiene propiedades físicas y tiene propiedades químicas.
8. Somos capaces de hacer todos los ejercicios de esta página.
9. No somos capaces de hacer todos los ejercicios de esta página.
10. Si dos o más elementos se unen químicamente para formar una nueva sustancia, entonces el producto se denomina un compuesto.
11. Las proposiciones moleculares contienen términos de enlace.
12. Este problema no es correcto.
13. Rosa es menor de edad y su hermano es mayor de edad.
14. No se puede terminar el reportaje hoy.
15. Necesitaremos ayuda o tardaremos dos días en completar el reportaje.

B. Escribir cuatro proposiciones que tengan términos de enlace. Utilizar *distinto* término de enlace en cada una de ellas.

C. Escribir cuatro proposiciones atómicas.

D. Simbolizar las proposiciones siguientes, indicando cuál es la proposición atómica simbolizada por cada una de las letras mayúsculas.

1. Si son más de las seis, entonces la asamblea ha empezado.
2. O mi reloj va mal o llegaremos tarde.
3. Si las células de la planta no tienen clorofila, entonces no pueden sintetizar los alimentos.
4. La piedra arenosa se produce por medio de capas de arena endurecida y la piedra caliza se produce por las conchas de pequeños animales en el mar.

5. Si la tribu fuera nómada, entonces no construiría chozas permanentes.

E. Simbolizar las proposiciones siguientes, utilizando los siguientes símbolos para las proposiciones atómicas:

P = «Luis ha venido demasiado tarde»
Q = «Juan ha venido demasiado pronto»
R = «El Sr. Pérez está enfadado».

1. Si Luis ha venido demasiado tarde y Juan demasiado pronto, entonces el Sr. Pérez está enfadado.
2. Si o Luis ha venido demasiado tarde o Juan ha venido demasiado pronto, entonces el Sr. Pérez está enfadado.
3. Si Luis ha venido demasiado tarde y Juan no ha venido demasiado pronto, entonces el Sr. Pérez no está enfadado.
4. Si el Sr. Pérez está enfadado, entonces Luis ha venido demasiado tarde o Juan ha venido demasiado pronto.
5. El Sr. Pérez está enfadado, y Luis ha venido demasiado tarde y Juan ha venido demasiado pronto.
6. Si el Sr. Pérez no está enfadado, entonces Luis no ha venido demasiado tarde.
7. O Luis ha venido demasiado tarde o Juan ha venido demasiado pronto.
8. Si Juan no ha venido demasiado pronto o Luis ha venido demasiado tarde, entonces el Sr. Pérez está enfadado.
9. El Sr. Pérez está enfadado y o Luis ha venido demasiado tarde o Juan ha venido demasiado pronto.
10. Juan ha venido demasiado pronto, y si Luis ha venido demasiado tarde, entonces el Sr. Pérez está enfadado.
11. No ocurre que, Luis ha venido demasiado tarde y Juan ha venido demasiado pronto.
12. Si Luis no ha venido demasiado tarde y Juan ha venido demasiado pronto, entonces el Sr. Pérez no está enfadado.

F. Completar la traducción de las siguientes proposiciones moleculares en símbolos lógicos, sustituyendo las palabras que corresponden a los términos de enlace por sus correspondientes símbolos.

1. Si **P** entonces **Q**
2. O **P** o **Q**
3. Si o **P** o **Q** entonces no **R**
4. O no **P** o no **Q**

5. O P y Q o R y S
6. No ocurre que, a la vez P y Q
7. No ocurre que o P o Q
8. Si no P entonces no Q y R
9. No ocurre que, si P entonces Q
10. No ocurre que, a la vez P y no P
11. P y o Q o R
12. O P y Q o R
13. P y si Q, entonces no R

G. Aparear cada una de las palabras de la izquierda con los ejemplos o definiciones en la lista de la derecha.

1. disjunción
2. negación
3. proposición condicional
4. proposición molecular
5. antecedente
6. consecuente
7. conjunción
8. proposición atómica

(a) $P \rightarrow Q$
(b) $\neg(P \ \& \ Q)$
(c) $P \vee Q$
(d) Q en la proposición $P \rightarrow Q$
(e) $\neg P$
(f) P en la proposición $P \rightarrow Q$
(g) $P \ \& \ Q$
(h) $\neg P \vee$
(i) Cualquier proposición con un término de enlace
(j) Cualquier proposición sin términos de enlace.

H. Simbolizar las siguientes proposiciones matemáticas eligiendo letras mayúsculas para sustituir las proposiciones matemáticas atómicas e indicar la proposición atómica a la que sustituye cada una.

1. x es mayor que cinco.
2. Cuatro no es un número impar.
3. x es igual a tres o x es mayor que seis.
4. No ocurre que si x es un número impar entonces x es divisible por dos.
5. Si x más cuatro es siete e y más x es ocho entonces y es cinco
6. Si x es menor que cinco o mayor que siete entonces no es igual a seis.

I. Simbolizar las proposiciones matemáticas (3), (5) y (6) de **H** utilizando los símbolos lógicos para los términos de enlace y los símbolos matemáticos típicos para las proposiciones atómicas.

J. Traducir las siguientes proposiciones lógicas (fórmulas) en lengua castellana. Primero elegir una proposición atómica en castellano para cada letra atómica, y luego escribir la proposición completa en castellano.

1. $\neg S$
2. $P \vee \neg Q$
3. $\neg(R \rightarrow S)$
4. $x<5 \quad \rightarrow \quad \neg(x>6)$
5. $x+3<5 \quad \& \quad \neg(x=0) \quad \rightarrow \quad x=1$
6. $P \ \& \ \neg Q \rightarrow R$

Examen de repaso

I. *Simbolización del lenguaje cuotidiano*

Simbolizar las proposiciones siguientes, diciendo claramente lo que representan las letras mayúsculas elegidas como símbolos. Para las proposiciones matemáticas utilizar los símbolos matemáticos típicos.

a. Si el libro cuesta más de cien pesetas, entonces Juan no podrá comprarlo.
b. O ésta es la casa de Antonio o la dirección que nos han dado no es correcta.
c. Se ha levantado aire y ha refrescado.
d. Si x es menor que tres, entonces es menor que cuatro.
e. Si x no es igual a cinco, entonces o es mayor que cinco o es menor que cinco.

II. *Simbolización con símbolos dados*

Utilizando los símbolos dados, simbolizar las proposiciones siguientes. (No es necesario escribir las proposiciones en castellano.)

Sea

P = «Juan ha venido demasiado pronto»
Q = «María ha venido demasiado tarde»
R = «El Sr. Pérez está enfadado».

a. Si Juan ha venido demasiado pronto o María demasiado tarde, entonces el Sr. Pérez está enfadado.
b. Si María ha venido demasiado tarde, entonces Juan no ha venido demasiado pronto.
c. O el Sr. Pérez está enfadado o María no ha venido demasiado tarde.

d. María ha venido demasiado tarde y Juan ha venido demasiado pronto, y el Sr. Pérez está enfadado.
e. Si el Sr. Pérez no está enfadado, entonces Juan no ha venido demasiado pronto y María no ha venido demasiado tarde.
f. O María no ha venido demasiado tarde o Juan ha venido demasiado pronto.
g. Si María no ha venido demasiado tarde y Juan no ha venido demasiado pronto, entonces el Sr. Pérez no está enfadado.

III. *Definiciones*

Completar las proposiciones siguientes eligiendo de entre las palabras escritas al final la que está definida por la proposición dada.

a. La proposición molecular que utiliza el término de enlace «y» es una ....
b. La proposición molecular que utiliza el término de enlace «no» es una ....
c. La combinación de una o más proposiciones atómicas con un término de enlace de proposiciones se denomina ....
d. En Lógica, una proposición completa que no tiene término de enlace se denomina ....
e. La proposición molecular que utiliza el término de enlace «si... entonces...» se denomina una ....
f. La proposición situada antes del término de enlace en una proposición condicional se denomina ....
g. La proposición situada después del término de enlace en una proposición condicional se denomina ....
h. La proposición molecular que utiliza el término de enlace «o» es una ....

antecedente	conjunción
atómica	consecuente
proposición molecular	disjunción
condicional	negación

IV. *Uso del paréntesis*

En algunas de las proposiciones siguientes son necesarios paréntesis para que correspondan a las proposiciones moleculares indicadas en la izquierda. Poner los paréntesis en los lugares correspondientes cuando sean necesarios.

a. conjunción $P \vee Q \& R$
b. negación $\neg P \& Q$

c. conjunción	$\neg P \;\&\; Q$
d. condicional	$P \;\&\; Q \rightarrow R$
e. negación	$\neg P \vee \neg R$
f. disjunción	$P \rightarrow Q \vee R$
g. condicional	$\neg P \rightarrow \neg R$
h. disjunción	$P \vee Q \;\&\; R$
i. negación	$\neg P \rightarrow Q$
j. conjunción	$P \;\&\; Q \rightarrow R$

V. *Simbolización de proposiciones con paréntesis*

Señalar el término de enlace dominante en las proposiciones siguientes. Indicar después cómo sería la proposición en símbolos lógicos y añadir los paréntesis donde sean necesarios.

a. No ocurre que, o Jaime es el más alto o Juan es el más alto.
b. Tomás no es nuestro representante y José no es nuestro capitán.
c. O «beta» está antes que «gamma» y «eta» está antes que «theta» o yo no sé griego.
d. Antonio se marcha ahora y o yo iré con él o Pedro irá con él.
e. Si el baile empieza a las seis, entonces nosotros llegaremos pronto y Pilar llegará tarde.

CAPITULO 2

INFERENCIA LÓGICA

● 2.1 *Introducción*

En el capítulo uno, hemos aprendido a dividir las proposiciones en sus partes lógicas y de este modo se ha llegado a conocer algo sobre la forma lógica de las proposiciones. La idea de *forma* se puede ilustrar con alguno de los resultados del capítulo anterior. La proposición $P \rightarrow Q$ es la misma, en cuanto a la forma lógica se refiere, cualesquiera que sean las proposiciones en castellano que sustituyan a la P y a la Q. Los términos de enlace determinan la forma de la proposición.

Conocidas las formas de las proposiciones y teniendo los instrumentos de simbolización a nuestro alcance, podemos dirigirnos ya hacia una parte importante de la Lógica formal: inferencia y deducción. Las *reglas de inferencia* que rigen el uso de los términos de enlace son muy simples. Se pueden aprender estas reglas y su uso, como se aprenden las reglas de un juego. El juego se juega con proposiciones, o fórmulas lógicas, nombre que se dará a las proposiciones simbolizadas. Se empieza con conjuntos de fórmulas que se denominan *premisas*. El objeto del juego es utilizar las reglas de inferencia de manera que conduzcan a otras fórmulas que se denominan *conclusiones*. El paso lógico de las premisas a la conclusión es una *deducción*. La conclusión que se obtiene se dice que es una *consecuencia lógica* de las premisas si cada paso que se da para llegar a la conclusión está permitido por una regla. La idea de inferencia se puede expresar de la manera siguiente: *de premisas verdaderas se obtienen sólo conclusiones que son verdaderas*. Es decir, si las premisas son verdaderas, entonces las conclusiones que se *derivan* de ellas lógicamente, *han* de ser verdaderas.

Con frecuencia se aprende un juego nuevo, por un ejemplo. Veamos algunos de inferencia antes de proseguir con las leyes formales. Se supone que se tienen dos premisas, la fórmula $P \rightarrow Q$ y la fórmula P. Se sabe que estas premisas están dadas; es decir, se empieza diciendo que se ha dado P y que se ha dado $P \rightarrow Q$. ¿Se puede sacar una conclusión de estas dos proposiciones? Es decir, ¿se puede idear otra proposición que haya de ser cierta si las premisas son ciertas? La conclusión es clara si se leen las premisas en la forma:

Si P entonces Q, y P.

La primera proposición expresa que si se verifica P, entonces se verifica Q, y la segunda dice que se verifica P. La conclusión es que se verifica Q. La proposición Q es consecuencia lógica de las premisas, P y $P \rightarrow Q$.

Veamos ahora una inferencia de la misma forma, pero cuyo contenido se ha suplido por lenguaje corriente. La primera premisa es:

Si llueve, entonces el cielo ha de estar cubierto.

La segunda premisa es:

Llueve.

¿Qué conclusión se puede sacar de las dos premisas?

La respuesta es la conclusión «El cielo ha de estar cubierto». Esta conclusión se puede inferir lógicamente de las premisas dadas. Se discutirá a continuación la regla particular de inferencia que permite deducir esta conclusión de las premisas.

● 2.2 *Reglas de inferencia y demostración*

Modus Ponendo Ponens. La regla de inferencia aplicada en el ejemplo precedente tiene un nombre latino, *modus ponendo ponens.* Consideremos algunos ejemplos del uso de esta regla en la deducción de conclusiones a partir de premisas.

Premisa 1.	Si él está en el partido de fútbol, entonces él está en el estadio.
Premisa 2.	Él está en el partido de fútbol.
Conclusión.	Él está en el estadio.

Otro ejemplo del uso del *modus ponendo ponens* es el siguiente:

Premisa 1.	Si no hace frío, entonces el lago no se helará.
Premisa 2.	No hace frío.
Conclusión.	El lago no se helará.

Simbólicamente, el primer ejemplo se expresa así:

Sea:

$$P = \text{«Él está en el partido de fútbol»}$$
$$Q = \text{«Él está en el estadio»},$$

entonces

Premisa 1. $P \rightarrow Q$
Premisa 2. P

Conclusión Q

La regla de inferencia llamada *modus ponendo ponens* permite *demostrar* Q a partir de $P \rightarrow Q$ y P.

El segundo ejemplo se simboliza de la manera siguiente, donde P es la proposición «Hace frío» y Q es la proposición «El lago se helará».

$$\frac{\neg P \rightarrow \neg Q \qquad \neg P}{\neg Q}$$

En cada uno de los ejemplos, la regla *modus ponendo ponens* permite pasar de dos premisas a la conclusión. Decir que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas, es decir, que siempre que las premisas son ciertas, la conclusión es también cierta. La regla de inferencia aprendida dice que si se tienen dos proposiciones de la forma $P \rightarrow Q$ y P, se puede deducir la conclusión Q.

Recuérdese que la regla se aplica a la *forma* de las proposiciones, o sea, que siempre que se dé una *proposición condicional* y se dé precisamente *el antecedente de aquella condicional,* se sigue precisamente el *consecuente.* La misma regla se aplica tanto si el antecedente es una proposición atómica como si es una proposición molecular y tanto si el consecuente es una proposición atómica como si es una proposición molecular. En la proposición condicional anterior el antecedente y el consecuente son proposiciones moleculares. La segunda premisa afirma el antecedente, que es $\neg P$. Por tanto, el consecuente, que es $\neg Q$, se sigue de la regla *modus ponendo ponens.* En todos los ejemplos que se dan a continuación se aplica el *modus ponendo ponens.* Tanto los antecedentes como los consecuentes que se utilizan pueden ser proposiciones atómicas o moleculares:

a. $\dfrac{R \rightarrow S \qquad R}{S}$ *b.* $\dfrac{P \qquad P \rightarrow \neg Q}{\neg Q}$ *c.* $\dfrac{P \;\&\; Q \rightarrow R \qquad P \;\&\; Q}{R}$

d. $\dfrac{\neg P \rightarrow Q \qquad \neg P}{Q}$ *e.* $\dfrac{P \rightarrow Q \;\&\; R \qquad P}{Q \;\&\; R}$

Obsérvese, en el segundo ejemplo, que la condicional figura en segundo lugar, y P, que es precisamente el antecedente, está situado primero. Cuando el *modus ponendo ponens* o cualquiera de las otras reglas se aplica para sacar una conclusión de dos o más proposiciones, el orden de aquellas proposiciones es indiferente.

Recuérdese que una condicional se puede escribir $(P) \rightarrow (Q)$. Con los paréntesis, el *modus ponendo ponens* es:

$$\begin{array}{l} (P) \rightarrow (Q) \\ (P) \\ \hline (Q) \end{array}$$

Si es una ayuda, se pueden usar paréntesis cuando el antecedente o el consecuente son proposiciones moleculares, como en los tres últimos ejemplos anteriores o en el siguiente:

$$\begin{array}{l} \neg P \vee R \rightarrow S \ \& \ \neg Q \\ \neg P \vee R \\ \hline S \ \& \ \neg Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} (\neg P \vee R) \rightarrow (S \ \& \ \neg Q) \\ (\neg P \vee R) \\ \hline (S \ \& \ \neg Q) \end{array}$$

El nombre *modus ponendo ponens* se puede explicar de la siguiente manera: Esta regla de inferencia es el método *(modus)*, que afirma *(ponens)* el consecuente, afirmando *(ponendo)* el antecedente.

EJERCICIO 1

A. ¿Qué conclusión se puede sacar de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas? Es decir, ¿qué proposición lógica se sigue de las premisas?

1. Si usted está en Madrid, entonces su reloj señala la misma hora que en Barcelona. Usted está en Madrid.
2. Si no nos despedimos ahora, entonces no cumpliremos nuestro plan. No nos despedimos ahora.
3. Si esta planta no crece, entonces o necesita más agua o necesita mejor abono. Esta planta no crece.
4. Son las cinco. Si son las cinco, entonces la oficina está cerrada.
5. Si vivo en la capital de los Estados Unidos, entonces no vivo en ninguno de los cincuenta estados. Vivo en la capital de los Estados Unidos.

B. Utilizando *modus ponendo ponens* sacar una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes. Escribir las conclusiones en la línea (3).

1. (1) $P \vee Q \rightarrow R$
   (2) $P \vee Q$
   (3)

2. (1) $\neg P \rightarrow \neg R$
   (2) $\neg P$
   (3)

3. (1) $\neg P$
   (2) $\neg P \rightarrow Q$
   (3)

4. (1) $P \rightarrow Q \ \& \ R$
   (2) P
   (3)

5. (1) $P \rightarrow Q \vee R$
   (2) P
   (3)

6. (1) $\neg R$
   (2) $\neg R \rightarrow Q \ \& \ P$
   (3)

C. Poner una «C» junto a cada ejemplo en el que la conclusión es correcta según el *modus ponendo ponens*. Poner una «I» junto a cada conclusión incorrecta.

1. Premisas: S y $S \rightarrow T$; conclusión: T
2. Premisas: $T \rightarrow V$ y T; conclusión: V
3. Premisas: $P \rightarrow Q$ y Q; conclusión: P
4. Premisas: S y $R \rightarrow S$; conclusión: R
5. Premisas: R y $R \rightarrow S$; conclusión: S

D. Utilizar el *modus ponendo ponens* para deducir una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes:

1. Si $x \neq 0$ entonces $x+y>1$. $x \neq 0$.
2. Si $x+y=z$ entonces $y+x=z$. $x+y=z$.
3. Si x es un número e y es un número, entonces $x+y$ es un número. x es un número e y es un número.
4. Si $x>y$ y $y>z$, entonces $x>z$. A la vez $x>y$ y $y>z$.
5. A la vez $x=y$ y $y=z$. Si $x=y$ y $y=z$, entonces $x=z$.

Demostraciones. Cuando se usa una regla de inferencia para pasar de un conjunto de proposiciones a otra proposición se *demuestra* que la última proposición es consecuencia lógica de las otras. Esto se puede expresar de muchas maneras. Se puede decir que se ha *derivado* la conclusión de las premisas, que la conclusión se *infiere de* o es *implicada* por las premisas, que la conclusión se *deduce* de las premisas, y otras. Todas estas palabras o expresiones significan lo mismo: Dadas ciertas proposiciones, si una regla de inferencia nos permite pasar a otra proposición, entonces esta proposición es una conclusión lógica de las proposiciones dadas.

En la última sección se han visto algunas demostraciones cortas. Utilizando *modus ponendo ponens* como regla, se demostró una conclusión a partir de un conjunto de premisas. Por ejemplo, de $R \rightarrow S$ y R se demostró S. Se podría esquematizar la demostración de manera clara poniendo

(1)	$R \rightarrow S$	P
(2)	R	P
(3)	S	PP

Cada línea en la demostración está numerada. Después de las proposiciones simbolizadas se indican como se obtiene cada proposición. Se han indicado con P las premisas dadas. Las líneas que son premisas se representan por P en la *regla de premisas.* Se parte de ellas y se deduce la línea (3) por el *modus ponendo ponens,* lo que se indica en la línea por la abreviatura PP, escrita después de la proposición.

Ejercicio 2

A. A continuación se dan conjuntos de premisas. Deducir una conclusión de cada conjunto, indicando cómo se obtienen cada una de las terceras líneas por medio de las abreviaturas P en la regla de premisas, o PP en el *modus ponendo ponens.*

Ejemplo:

(1)	$\neg P \rightarrow S$	P
(2)	$\neg P$	P
(3)	S	PP

1. (1) $\neg A \rightarrow \neg B$
   (2) $\neg A$
   (3)

2. (1) M
   (2) $M \rightarrow N$
   (3)

3. (1) R
   (2) $R \rightarrow \neg T \vee Q$
   (3)

4. (1) $\neg B \rightarrow \neg D \ \& \ A$
   (2) $\neg B$
   (3)

B. Simbolizar cada uno de los conjuntos de premisas del apartado **A** en el Ejercicio 1. Después indicar una demostración como en la Sección **A** de este ejercicio, numerando cada línea y señalando por medio de las abreviaturas P para las premisas y PP para *modus ponendo ponens,* cómo se justifica cada línea.

C. Simbolizar las proposiciones matemáticas de la Sección **D** del Ejercicio 1. Después indicar una demostración como en la Sección **A** de este ejercicio.

Demostraciones en dos pasos. Algunas veces no se puede ir directamente de las premisas a la conclusión por un solo paso. Pero esto no impide poder llegar a la conclusión. Cada vez se deduce una proposición por medio de una regla, entonces esta proposición se puede utilizar junto con las premisas para deducir otra proposición. Considérese un ejemplo en el que se tienen tres premisas:

(1)	$A \rightarrow B$	P
(2)	$B \rightarrow C$	P
(3)	A	P

Se quiere probar la proposición C. Para llegar a C, se necesitan dos pasos, cada uno permitido por el *modus ponendo ponens,* PP. Estos dos pasos son las líneas (4) y (5) escritas a continuación:

(1)	$A \rightarrow B$	P
(2)	$B \rightarrow C$	P
(3)	A	P
(4)	B	PP 1, 3
(5)	C	PP 2, 4

Observemos atentamente el esquema de la demostración. Cada línea está numerada, tanto si es una premisa como una línea deducida. Cada línea está justificada, bien por ser premisa (indicada por P), bien deducida por una regla de inferencia (indicada por la abreviatura PP). Además, después de las abreviaturas correspondientes a las reglas empleadas para obtener las líneas *deducidas,* se ha indicado el número de las líneas a partir de las cuales se ha deducido esta línea. Por ejemplo, en la línea (4) la sigla «PP 1, 3» significa que B se ha deducido por el *modus ponendo ponens* de las líneas (1) y (3). Análogamente, en la línea (5) se ha deducido de la C por medio de la regla PP de las líneas (2) y (4). Obsérvese que se puede utilizar una línea que se ha deducido, junto con otras líneas, para deducir una nueva línea. Cada línea que puede ser justificada ya sea como una premisa o por el uso de una regla, se puede utilizar en otros pasos posteriores de la demostración.

Antes de intentar hacer algunas demostraciones cortas, consideremos todavía un ejemplo. Se suponen dadas las premisas siguientes y se quiere demostrar R :

(1)	$S \rightarrow \neg T$	P
(2)	S	P
(3)	$\neg T \rightarrow R$	P
(4)	$\neg T$	PP 1, 2
(5)	R	PP 3, 4

Se utiliza el *modus ponendo ponens* para deducir una línea (4) y entonces se puede aplicar el *modus ponendo ponens* a aquella línea y a otra, tal como la (3) para deducir la conclusión (5). Se da un paso (permitido por una regla) y después se puede dar otro paso usando la proposición deducida.

Ejercicio 3

A. En cada uno de los ejercicios siguientes se ha de demostrar que una proposición es consecuencia lógica de las premisas dadas. Deducir la conclusión, escribiendo la abreviatura que corresponde a la regla que permite obtener cada línea, y cuando se empleen líneas deducidas anteriormente, indicar el número de cada línea que ha sido utilizada al aplicar la regla.

1. Demostrar: $\neg T$
   - (1) $R \rightarrow \neg T$ P
   - (2) $S \rightarrow R$ P
   - (3) S P
   - (4)
   - (5)

2. Demostrar: G
   - (1) $\neg H \rightarrow \neg J$ P
   - (2) $\neg H$ P
   - (3) $\neg J \rightarrow G$ P
   - (4)
   - (5)

3. Demostrar: C
   - (1) $A \rightarrow B \ \& \ D$ P
   - (2) $B \ \& \ D \rightarrow C$ P
   - (3) A P
   - (4)
   - (5)

4. Demostrar: $M \vee N$
   - (1) $\neg J \rightarrow M \vee N$ P
   - (2) $F \vee G \rightarrow \neg J$ P
   - (3) $F \vee G$ P
   - (4)
   - (5)

5. Demostrar: $\neg S$
   - (1) T P
   - (2) $T \rightarrow \neg Q$ P
   - (3) $\neg Q \rightarrow \neg S$ P
   - (4)
   - (5)

B. Simbolizar cada una de las proposiciones de los conjuntos siguientes y demostrar que la conclusión (la proposición que empieza por «Por tanto...») es consecuencia lógica. Se seguirá el mismo método de las demostraciones de la pág. 50.

1. Si 2 es mayor que 1, entonces 3 es mayor que 1.
   Si 3 es mayor que 1, entonces 3 es mayor que 0.
   2 es mayor que 1.
   Por tanto, 3 es mayor que 0.

2. $x+1=2$.*
   Si $x+1=2$ entonces $y+1=2$.
   Si $y+1=2$ entonces $x=y$.
   Por tanto, $x=y$.
3. Si $x+0=y$ entonces $x=y$. $x+0=y$.
   Si $x=y$ entonces $x+2=y+2$.
   Por tanto, $x+2=y+2$.
4. Si $x>y$ y $y>z$ entonces $x>z$.
   $x>y$ y $y>z$.
   Si $x>z$ entonces $x>10$.
   Por tanto, $x>10$.
5. Si $x=y$ y $y=z$ entonces $x=z$.
   Si $x=z$ entonces $z=x$.
   $x=y$ y $y=z$.
   Por tanto, $z=x$.
6. Si se levanta aire húmedo, entonces refrescará.
   Si refresca, entonces se formarán nubes.
   Se levanta aire húmedo.
   Entonces se formarán nubes.

C. No existe limitación respecto al número de veces que se puede aplicar en una demostración la regla *modus ponendo ponens*. Los ejercicios que siguen requieren más de dos aplicaciones. Deducir la conclusión que se desea demostrar, expresando la regla aplicada para deducir cada línea e indicando las líneas que se han utilizado al aplicar la regla.

Demostrar: $\neg N$

(1) $R \rightarrow \neg S$ P
(2) R P
(3) $\neg S \rightarrow Q$ P
(4) $Q \rightarrow \neg N$ P

Demostrar: B

(1) $\neg G \rightarrow E$ P
(2) $E \rightarrow K$ P
(3) $\neg G$ P
(4) $K \rightarrow \neg L$ P
(5) $\neg L \rightarrow M$ P
(6) $M \rightarrow B$ P

Demostrar: $R \vee S$

(1) $C \vee D$ P
(2) $C \vee D \rightarrow \neg F$ P
(3) $\neg F \rightarrow A \ \& \ \neg B$ P
(4) $A \ \& \ \neg B \rightarrow R \vee S$ P

---

* Cuando para expresar una proposición atómica se usan símbolos matemáticos, no es necesario utilizar letras mayúsculas para simbolizar la proposición atómica, pues se utilizarán los símbolos matemáticos como lógicos. Por ejemplo, en el Ejercicio 2, Sección **B**, las premisas se pueden escribir

$$x+1=2$$
$$x+1=2 \rightarrow y+1=2$$
$$y+1=2 \rightarrow x=y$$

Doble negación. La *regla de doble negación* es una regla simple que permite pasar de una premisa única a la conclusión. Un ejemplo simple es el de una negación de negación, que brevemente se denomina «doble negación». Sea la proposición:

No ocurre que Ana no es un estudiante:

¿Qué conclusión se puede sacar de esta premisa? Evidentemente, se puede decir:

Ana es un estudiante.

La regla de doble negación también actúa en sentido contrario. Por ejemplo, de la proposición:

Juan toma el autobús para ir a la escuela,

se puede concluir la negación de su negación:

No ocurre que Juan no toma el autobús para ir a la escuela.

Así la regla de doble negación tiene dos formas simbólicas.

$$\frac{(P)}{\neg\neg(P)} \quad \text{y} \quad \frac{\neg\neg(P)}{(P)}$$

La abreviatura para esta regla es DN.

En los ejemplos siguientes, el uso de la doble negación permite demostrar una conclusión como consecuencia lógica de una premisa.

a. (1) $\mathbf{R}$ P
(2) $\neg\neg\mathbf{R}$ DN 1

b. (1) $\neg\neg\mathbf{A}$ P
(2) $\mathbf{A}$ DN 1

c. (1) $\neg\neg(\mathbf{P} \,\&\, \mathbf{Q})$ P
(2) $\mathbf{P} \,\&\, \mathbf{Q}$ DN 1

Ahora que se conocen ya dos reglas de inferencia se pueden hacer demostraciones cortas que requieran el uso de ambas. Considérese el ejemplo que sigue en el que el *modus ponendo ponens,* PP, y la doble negación, DN, se utilizan para llegar a la conclusión:

(1) $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ P
(2) $\mathbf{P}$ P
(3) $\mathbf{Q}$ PP 1, 2
(4) $\neg\neg\mathbf{Q}$ DN 3

En la demostración hay dos premisas y dos líneas derivadas. La línea (3) se deriva de las líneas (1) y (2) por el *modus ponendo ponens*. La línea (4) se deduce de la línea (3) por la regla de la doble negación.

EJERCICIO 4

A. ¿Qué conclusiones se pueden sacar de cada una de las proposiciones siguientes por la doble negación?

1. Todos los mamíferos son animales de sangre caliente.
2. No ocurre que el núcleo de un átomo no está cargado positivamente.
3. El granito es un tipo de mineral ígneo.
4. En los Estados Unidos las elecciones presidenciales tienen lugar cada cuatro años.
5. No ocurre que un quinto no es el veinte por ciento.

B. En cada uno de los siguientes grupos de premisas deducir una conclusión, cuando sea posible, por el *modus ponendo ponens*. Si la regla *modus ponendo ponens* no se puede aplicar a las premisas, indicarlo poniendo «no PP».

1. (1) $P \ \& \ Q \rightarrow R$
   (2) R
2. (1) $Q \rightarrow R \vee S$
   (2) Q
3. (1) $\neg\neg R$
   (2) $Q \rightarrow \neg\neg R$
4. (1) S
   (2) $S \rightarrow \neg P$
5. (1) $S \rightarrow T \ \& \ U$
   (2) $T \ \& \ U$
6. (1) $\neg\neg P \rightarrow Q$
   (2) $\neg\neg P$

C. Poner la letra C junto a cada afirmación cierta. Poner la letra F junto a cada afirmación falsa.

1. De $\neg\neg R$ se puede deducir R.
2. De S se puede deducir $\neg S$.
3. De $P \rightarrow Q$ y P se puede deducir Q.
4. De Q se puede deducir $\neg\neg Q$.
5. De $R \rightarrow S$ y S se puede deducir R.

D. Demostrar que las conclusiones son consecuencia lógica de las premisas dadas en cada uno de los ejemplos que siguen. Dar la *demostración completa* como en los ejemplos anteriores; es decir, se ha de numerar cada línea, indicar la abreviatura de la regla usada, y los números de las líneas de las que se ha deducido cada línea en la demostración.

1. Demostrar: $\neg\neg T$

(1)	$S \rightarrow T$	P
(2)	S	P
(3)	T	
(4)	$\neg\neg$T	DN (3)

2. Demostrar: B

(1)	$\neg A$	P
(2)	$\neg A \rightarrow \neg\neg B$	P
(3)		
(4)		

3. Demostrar: G

(1)	$H \rightarrow \neg\neg G$	P
(2)	H	P
(3)		
(4)		

4. Demostrar: $P \vee Q$

(1)	$R \rightarrow \neg\neg(P \vee Q)$	P
(2)	R	P
(3)		
(4)		

5. Demostrar: $\neg\neg N$

(1)	$M \rightarrow \neg P$	P
(2)	$\neg P \rightarrow N$	P
(3)	M	P
(4)		
(5)		
(6)		

6. Demostrar: Q

(1)	$J \rightarrow K \,\&\, M$	P
(2)	J	P
(3)	$K \,\&\, M \rightarrow \neg\neg Q$	P
(4)		
(5)		
(6)		

Modus Tollendo Tollens. La regla de inferencia que tiene el nombre latino *modus tollendo tollens* se aplica también a las proposiciones condicionales. Pero en este caso, negando (tollendo) el consecuente, se puede negar (tollens) el antecedente de la condicional. La deducción siguiente es un ejemplo del uso del *modus tollendo tollens.*

Premisa 1.	Si tiene luz propia, entonces el astro es una estrella.
Premisa 2.	El astro no es una estrella.
Conclusión.	Por tanto no tiene luz propia.

Se simbolizará el ejemplo de la manera siguiente:

Sea

$P =$ «Tiene luz propia»

$Q =$ «El astro es una estrella».

$$P \rightarrow Q$$
$$\neg Q$$
$$\neg P$$

La abreviatura del *modus tollendo tollens* es TT.

Cuando el antecedente o el consecuente es una proposición molecular, puede usarse el paréntesis para mayor claridad:

$$(P) \rightarrow (Q)$$
$$\neg(Q)$$
$$\neg(P)$$

Por tanto, la regla *modus tollendo tollens* permite pasar de dos premisas: (a) una proposición condicional, y (b) una proposición que niega el consecuente, a una conclusión que niega el antecedente.

Otro ejemplo puede aclarar todavía la afirmación anterior. La proposición condicional es:

Si es por la mañana, entonces el sol estará en el Este.

Se niega el consecuente:

El sol no está en el Este.

Entonces se puede negar el antecedente:

Por tanto, no es por la mañana.

La regla se aplica a todo conjunto de premisas de esta *forma*. El antecedente o el consecuente pueden ser proposiciones moleculares o proposiciones atómicas. En los ejemplos siguientes, se usa la regla *modus tollendo tollens;* en cada uno de ellos una de las premisas es una condicional, y la otra premisa niega el consecuente.

a. (1) $R \rightarrow S$ P
(2) $\neg S$ P
(3) $\neg R$ TT 1, 2

b. (1) $Q \,\&\, R \rightarrow S$ P
(2) $\neg S$ P
(3) $\neg(Q \,\&\, R)$ TT 1, 2

c. (1) $P \rightarrow \neg Q$ P
(2) $\neg\neg Q$ P
(3) $\neg P$ TT 1, 2

Obsérvese que en el último ejemplo se niega una negación, lo que da lugar a una doble negación: se niega $\neg Q$ es decir, se toma como premisa $\neg\neg Q$.

Se considera ahora un ejemplo de una demostración en el que se aplican las tres reglas expuestas hasta aquí. Se trata de demostrar $\neg\neg R$.

(1) $P \rightarrow Q$ P
(2) $\neg Q$ P

(3) $\neg P \rightarrow R$	P
(4) $\neg P$	TT 1, 2
(5) R	PP 3, 4
(6) $\neg\neg R$	DN 5

Repasar este ejemplo para asegurarse que se puede seguir cada uno de los pasos. Se da ahora otro ejemplo en el que sólo se usan dos reglas. Se desea demostrar **A**.

(1) $\neg A \rightarrow \neg B$	P
(2) B	P
(3) $\neg\neg B$	DN 2
(4) $\neg\neg A$	TT 1, 3
(5) A	DN 4

El uso de la doble negación es aquí importante. Se necesita la negación del consecuente en la primera premisa para poder aplicar la regla TT. El consecuente es $\neg B$. La negación de esta proposición molecular se consigue anteponiendo el símbolo que corresponde al «no»; y así, $\neg\neg B$ niega a $\neg B$. No se tiene $\neg\neg B$ en las premisas, pero se puede deducir de la segunda premisa B. Obsérvese que esto es lo que se ha realizado en la línea (3). Utilizando el *modus tollendo tollens* se tiene la negación del antecedente. El antecedente es $\neg A$ de manera que su negación es $\neg\neg A$. Finalmente, todo se reduce a aplicar la regla DN otra vez, para obtener A de $\neg\neg A$.

Ejercicio 5

A. ¿Qué conclusión se puede deducir de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes utilizando la regla TT? Escribir las conclusiones en castellano.

1. Si la luz fuera simplemente un movimiento ondulatorio continuo, entonces la luz más brillante daría lugar siempre a una emisión de electrones con mayor energía que los originados por luz más tenue. La luz más brillante no siempre emite electrones con mayor energía que los originados por luz más tenue.
2. Si un ángulo de un triángulo es mayor de 90 grados, entonces la suma de los otros dos ángulos es menor de 90 grados. La suma de los otros dos ángulos no es menor de 90 grados.
3. Si el arriendo se mantiene válido, entonces el dueño es responsable de las reparaciones. El dueño no es responsable de las reparaciones.
4. Si llovió la pasada noche, entonces las pistas se han limpiado. Las

pistas no se han limpiado.

5. José no es mi hermano. Si Susana es mi hermana, entonces José es mi hermano.

B. Deducir una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes, aplicando la regla del *modus tollendo tollens.*

1. (1) $Q \rightarrow R$ P
   (2) $\neg R$ P
   (3)

2. (1) $\neg P \rightarrow Q$ P
   (2) $\neg Q$ P
   (3)

3. (1) $R \rightarrow S$ P
   (2) $\neg S$ P
   (3)

4. (1) $Q \rightarrow \neg R$ P
   (2) $\neg\neg R$ P
   (3)

5. (1) $P \rightarrow Q \;\&\; R$ P
   (2) $\neg(Q \;\&\; R)$ P
   (3)

6. (1) $P \vee Q \rightarrow R$ P
   (2) $\neg R$ P
   (3)

C. Demostrar que las conclusiones son consecuencia de las premisas dadas. Indicar la demostración completa.

1. Demostrar: C
   (1) $\neg B$ P
   (2) $A \rightarrow B$ P
   (3) $\neg A \rightarrow C$ P

2. Demostrar: F
   (1) $G \rightarrow H$ P
   (2) $\neg G \rightarrow \neg\neg F$ P
   (3) $\neg H$ P

3. Demostrar: $R \;\&\; S$
   (1) $P \rightarrow \neg Q$ P
   (2) Q P
   (3) $\neg P \rightarrow R \;\&\; S$ P

4. Demostrar: E
   (1) F P
   (2) $\neg E \rightarrow \neg F$ P

5. Demostrar: $\neg S$
   (1) $S \rightarrow \neg R$ P
   (2) R P

Más sobre la negación. La regla de doble negación se utiliza frecuentemente con *modus tollendo tollens,* y con otras reglas que se introducirán seguidamente. Puesto que el uso de la regla de doble negación en conjunción con la TT, esencialmente tiene siempre la misma forma, se pueden acortar deducciones, introduciendo una extensión de la definición de negación:

P *es la negación de* **¬P**

Ya se sabe que **¬P** es la negación de **P**, y podemos aplicar la regla de doble negación para lograr esta extensión de la definición de negación. Dado **¬P**, su negación es **¬¬P**, pero en virtud de la regla de doble negación, se obtiene la proposición equivalente **P**. Esta regla sólo permite simplificar, pero en sí no es una regla nueva de demostración.

Teniendo presente que **P** es la negación de **¬P** se simplifican las demostraciones, como en el caso siguiente:

(1)	$A \rightarrow \neg B$	P
(2)	B	P
(3)	$\neg A$	TT 1, 2

De las dos premisas se obtiene la negación de **A** sin más que aplicar TT. Teniendo en cuenta que **A** es la negación de **¬A** resulta la negación de **B**, es decir, **¬B**. Sin esta extensión de la definición de negación, la deducción requiere una nueva línea en la que se aplica la regla de doble negación.

(1)	$A \rightarrow \neg B$	P
(2)	B	P
(3)	$\neg\neg B$	DN 2
(4)	$\neg A$	TT 1, 3

Obsérvese que el efecto de reconocer **P** como negación de **¬P** es extender el TT a la forma lógica siguiente:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow \neg Q \\ Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

Otra extensión análoga del TT se refiere al antecedente de la premisa condicional:

$$\begin{array}{l} \neg P \rightarrow Q \\ \neg Q \\ \hline P \end{array}$$

Esta extensión se usa en el ejemplo siguiente:

(1)	$\neg A \rightarrow B$	P
(2)	$\neg B$	P
(3)	A	TT 1, 2

Si A no se reconociera como negación de $\neg A$, esta deducción necesitaría la línea adicional usual para aplicación de la regla de doble negación.

(1)	$\neg A \rightarrow B$	P
(2)	$\neg B$	P
(3)	$\neg\neg A$	TT 1, 2
(4)	A	DN 3

Se puede utilizar esta extensión del TT en el antecedente y el consecuente, como se ve en el ejmplo

(1)	$\neg P \rightarrow \neg Q$	P
(2)	Q	P
(3)	P	TT 1, 2

Una ilustración de estas ideas en una deducción, utilizando proposiciones matemáticas, es la siguiente. Se quiere demostrar que $x=0$, y se tienen tres premisas.

(1)	$x \neq 0 \rightarrow x=y$	P
(2)	$x=y \rightarrow x=z$	P
(3)	$x \neq z$	P
(4)	$x \neq y$	TT 2, 3
(5)	$x=0$	TT 1, 4

Obsérvese que se obtiene la línea (5) de las líneas (1) y (4) puesto que «$x=0$» es la negación de «$x \neq 0$».

EJERCICIO 6

A. Usando la regla: P es la negación de $\neg P$, evitar la regla de doble negación en las deducciones siguientes.

1. Demostrar: $\neg P$

(1)	$P \rightarrow \neg Q$	P
(2)	Q	P

2. Demostrar: $\neg A$

(1)	$A \rightarrow \neg C$	P
(2)	$B \rightarrow C$	P
(3)	B	P

3. Demostrar: P

(1)	$\neg P \rightarrow \neg Q$	P
(2)	Q	P

4. Demostrar: A

(1)	$\neg A \rightarrow \neg B$	P
(2)	$\neg B \rightarrow \neg C$	P
(3)	C	P

5. Demostrar: $\neg S$

(1)	$P \rightarrow Q$	P
(2)	$Q \rightarrow R$	P
(3)	$S \rightarrow \neg R$	P
(4)	P	P

6. Demostrar: $\neg A$

(1)	$A \rightarrow B$	P
(2)	$B \rightarrow C$	P
(3)	$C \rightarrow D$	P
(4)	$\neg D$	P

B. Teniendo en cuenta que «$x=0$» es la negación de «$x \neq 0$», evitar la regla de doble negación en las deducciones siguientes.

1. Demostrar: $x=0$

(1)	$x \neq 0 \quad \rightarrow \quad x+y \neq y$	P
(2)	$x+y=y$	P

2. Demostrar: $x \neq 0$

(1)	$x=0 \quad \rightarrow \quad x \neq y$	P
(2)	$x=z \quad \rightarrow \quad x=y$	P
(3)	$x=z$	P

3. Demostrar: $x=y$

(1)	$x \neq y \quad \rightarrow \quad x \neq z$	P
(2)	$x \neq z \quad \rightarrow \quad x \neq 0$	P
(3)	$x=0$	P

4. Demostrar: $x \neq 0$

(1)	$x=y \quad \rightarrow \quad x=z$	P
(2)	$x=z \quad \rightarrow \quad x=1$	P
(3)	$x=0 \quad \rightarrow \quad x \neq 1$	P
(4)	$x=y$	P

5. Demostrar: $x \neq y$

(1)	$x=y \quad \rightarrow \quad y=z$	P
(2)	$y=z \quad \rightarrow \quad y=w$	P
(3)	$y=w \quad \rightarrow \quad y=1$	P
(4)	$y \neq 1$	P

6. Demostrar: $x=0$

(1)	$x \neq 0 \quad \rightarrow \quad y=1$	P
(2)	$x=y \quad \rightarrow \quad y=w$	P
(3)	$y=w \quad \rightarrow \quad y \neq 1$	P
(4)	$x=y$	P

Adjunción y simplificación. Se suponen dadas dos proposiciones como premisas. La primera es

Jorge es adulto.

La segunda es

María es adolescente.

Si ambas proposiciones son verdaderas, entonces se podrían juntar en una proposición molecular utilizando el término de enlace «y» y se tendría una proposición verdadera que se leería

Jorge es adulto y María es adolescente.

Si ambas premisas son ciertas, entonces la conclusión tendría que ser cierta. La regla que permite pasar de las dos premisas a la conclusión se denomina *regla de adjunción*. Se indica abreviadamente por A.

De manera simbólica se puede ilustrar la regla así:

De las premisas	**P**
	Q
se puede concluir	**P** & **Q**
o se puede concluir	**Q** & **P**.

Con paréntesis, la regla se presenta de la manera siguiente:

De las premisas	(**P**)
	(**Q**)
se puede concluir	(**P**) & (**Q**)
o se puede concluir	(**Q**) & (**P**).

Los peréntesis en la conclusión son necesarios sólo si **P** o **Q** son proposiciones moleculares que no sean negaciones.

El orden de las premisas es indiferente. En el primer ejemplo se hubiera podido concluir «María es adolescente y Jorge es adulto». El significado no cambiaría. Si se tiene la proposición **Q** como una premisa, seguida de la proposición **P** como una premisa, la conclusión puede muy buen ser **P** & **Q**. ya que por una parte el orden de las líneas a las que se aplica la regla es indiferente, y también porque en la conjunción se puede alterar el orden.

A continuación se dan varios ejemplos en los que se utiliza la regla de adjunción.

a.

(1)	**P**	P
(2)	¬**R**	P
(3)	**P** & ¬**R**	A 1, 2

b.

(1)	**Q** & **S**	P
(2)	¬**T**	P
(3)	¬**T** & (**Q** & **S**)	A 1, 2

c.

(1)	**T**	P
(2)	**U**	P
(3)	**U** & **T**	A 1, 2

d.

(1)	**P** ∨ **Q**	P
(2)	**Q** ∨ **R**	P
(3)	(**P** ∨ **Q**) & (**Q** ∨ **R**)	A 1, 2

Consideremos ahora un ejemplo en el que precisamente se emplea la regla opuesta a la que se acaba de estudiar. Se tiene una premisa que dice:

El cumpleaños de María es el viernes y el mío el sábado.

De esta premisa se pueden deducir dos proposiciones. Una conclusión es:

El cumpleaños de María es el viernes.

La otra conclusión es:

El mío es el sábado.

Si la premisa es cierta, cada una de las conclusiones es también cierta. La regla que pemite pasar de una conjunción a cada una de las dos proposiciones que están unidas por & se denomina *regla de simplificación*. Esta regla se designa abreviadamente por S.

En forma simbólica la regla de simplificación es:

De la premisa	P & Q
se puede concluir	P
o se puede concluir	Q

Añadiendo paréntesis, la regla es:

De la premisa	(P) & (Q)
se puede concluir	(P)
o se puede concluir	(Q).

Con los paréntesis se hace resaltar que la premisa *ha* de ser una conjunción. La regla de simplificación *no se puede* aplicar a P & Q $\rightarrow$ R cuyo significado es: (P & Q) $\rightarrow$ R; *pero se puede aplicar a* P & (Q $\rightarrow$ R) obteniendo P o Q $\rightarrow$ R.

Ejemplos del uso de la regla de simplificación son

a. (1) (P $\vee$ Q) & R P
(2) R S 1

b. (1) Q & S P
(2) Q S 1

c. (1) (P $\vee$ Q) & R P
(2) P $\vee$ Q S 1

d. (1) T & $\neg$V P
(2) $\neg$V S 1

e. (1) (P & Q) & R P
(2) P & Q S 1

EJERCICIO 7

A. ¿Qué conclusión o conclusiones se pueden deducir de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes utilizando la regla A o la regla S?

1. Una sociedad es una colección de individuos que buscan una forma de vida y la cultura es su forma de vida.
2. El número atómico del hidrógeno es 1. El número atómico del helio es 2.
3. Kofi habla la lengua Twi. Ama habla la lengua Ga.
4. A Tomás le gusta esquiar y ha nevado en la montaña.
5. Esta inferencia es válida. Aquella no es válida.

6. (1) Q & R　P
   (2)

7. (1) (P ∨ Q) & S　P
   (2)

8. (1) R ∨ S　P
   (2) Q　P

9. (1) S　P
   (2) T　P
   (3)

10. (1) Q & R　P
    (2) S　P
    (3)

B. Probar que las conclusiones siguientes son consecuencia lógica de las premisas dadas. Dar la demostración completa.

1. Demostrar: $\neg S$
   (1) $\neg R$ & T　P
   (2) $S \rightarrow R$　P

2. Demostrar: A & B
   (1) $C \rightarrow A$　P
   (2) C　P
   (3) $C \rightarrow B$　P

3. Demostrar: $\neg\neg Q$
   (1) P & Q　P

4. Demostrar: B & D
   (1) B & C　P
   (2) $B \rightarrow D$　P

5. Demostrar: $\neg S$ & Q
   (1) $\neg S \rightarrow Q$　P
   (2) $\neg$(T & R)　P
   (3) $S \rightarrow$ T & R　P

6. Demostrar: A & C
   (1) A & $\neg B$　P
   (2) $\neg C \rightarrow B$　P

Disjunciones como premisas. Quizá se ha observado que en las reglas estudiadas hasta ahora, se han estado utilizando conjunciones, condicionales, y negaciones. En las reglas dadas aparecen los términos de enlace: «y», «si... entonces...», y «no». Sin embargo, no se ha considerado, ni se ha dado ninguna regla en la que interviniera el término de enlace «o». No se han utilizado disjunciones en las premisas cuando se deseaba mostrar el uso de una regla de inferencia.

Antes de introducir una regla conviene, sin embargo, considerar el *significado* de una disjunción en Lógica. En el lenguaje corriente hay dos maneras posibles de usar la palabra «o». Algunas veces se quiere significar que se presenta una u otra de dos cosas, pero no las dos a la vez. Este es el sentido *excluyente* de «o». Por ejemplo, en la proposición:

Juan vive en el norte de España o vive en el sur de España

se expresa que una de las dos proposiciones atómicas es cierta y la otra es falsa.

En Lógica, sin embargo, daremos un significado más amplio a la disjunción. Se denomina sentido *incluyente*. En el sentido inclusivo, cuando se utiliza la palabra «o», se supone que *por lo menos* un miembro de la disjunción se presenta y quizá ambos. Supóngase un cartel en una de las entradas de un estadio que diga:

Los periodistas o fotógrafos han de entrar por aquí.

El significado de la proposición es la disjunción:

Los periodistas han de entrar por aquí, o los fotógrafos
han de entrar por aquí.

Es una disjunción en sentido incluyente o sea, que por lo menos es cierto un miembro de la disjunción y pueden serlo ambos. En el ejemplo, la proposición significa que si una persona es un periodista ha de entrar por dicha puerta o si es un fotógrafo ha de entrar por dicha puerta. Además, los fotógrafos de la prensa, que sean a la vez periodistas, también entrarán por la misma puerta.

En Lógica, una disjunción significa que *por lo menos un* miembro de la disjunción es cierto y *quizá ambos* lo son. Se ha de tener presente que en Lógica se utiliza la palabra «o» en sentido incluyente y así se evitará el error de creer que si un miembro de una disjunción es cierto el otro ha de ser falso. Ambos pueden ser ciertos. La disjunción dice simplemente que *por lo menos* uno es cierto.

Con el significado lógico de una disjunción puesto en claro, ¿puede pensarse en una posible regla de inferencia que se aplique a una disjunción?

Consideremos la siguiente proposición como premisa:

O la producción aumenta o el precio aumenta.

Veamos si se puede imaginar una segunda premisa de manera que de las dos se pueda deducir una conclusión válida. La conclusión será *válida* cuando resulte de las premisas utilizando una «buena» regla de inferencia; y una regla es «buena» si equivale simplemente a asegurar que siempre que las premisas sean proposiciones ciertas la conclusión que resulta por aquella regla es una proposición cierta. Esto significa que reglas válidas de deducción nunca permiten pasar de premisas ciertas a conclusiones falsas.

Modus Tollendo Ponens. La regla anteriormente sugerida es la que se denomina *modus tollendo ponens*. Una vez más, el nombre latino dice algo acerca de la regla. Dice que *negando* (tollendo) un miembro de una disjunción se *afirma* (ponens) el otro miembro.

Simbólicamente, el *modus tollendo ponens* se puede expresar:

De la premisa	$P \vee Q$
y la premisa	$\neg P$
se puede concluir	Q

o

De la premisa	$P \vee Q$
y la premisa	$\neg Q$
se puede concluir	P

La abreviatura para *modus tollendo ponens* es TP.

Añadiendo paréntesis, *modus tollendo ponens* se puede escribir:

De	$(P) \vee Q$
y	$\neg(P)$
se deduce	(Q)

o

De	$(P) \vee (Q)$
y	$\neg(Q)$
se deduce	(P)

Supóngase que se tiene como premisa la disjunción

O esta sustancia contiene hidrógeno o contiene oxígeno

La segunda premisa dice

Esta sustancia no contiene hidrógeno.

Por medio de el *modus tollendo ponens* se puede concluir:

Esta sustancia contiene oxígeno.

Para aclarar la *forma* de esta inferencia, se puede simbolizar el ejemplo anterior. Sea

P = «Esta sustancia contiene hidrógeno»
Q = «Esta sustancia contiene oxígeno».

La demostración de la conclusión es:

(1)	$P \vee Q$	P
(2)	$\neg P$	P
(3)	Q	TP 1, 2

Obsérvese que una premisa (la negación) niega una parte de la disjunción. La conclusión afirma precisamente la otra parte. No importa cual sea el miembro negado, el derecho o el izquierdo. La disjunción dice que por lo menos un miembro se cumple; por tanto, si se encuentra que uno de los miembros *no* se cumple, se sabe que el otro ha de cumplirse.

Una disjunción en Lógica significa que por lo menos una de las dos proposiciones es cierta *y quizá ambas*. Supuesto que se tiene una premisa que dice que un miembro de la disjunción es cierto, ¿se puede concluir algo sobre el otro miembro? Por ejemplo, considérese la proposición anterior sobre oxígeno e hidrógeno. Si la segunda premisa hubiera sido «La sustancia tiene hidrógeno», ¿qué se podría concluir del oxígeno, en caso de poder concluir algo? No se podría concluir nada.

Véanse los ejemplos que siguen. Son ejemplos del uso de la regla *modus tollendo ponens*. Estas reglas no están limitadas a proposiciones atómicas. Igual que los otros tipos de proposiciones, la disjunción tiene lugar entre proposiciones moleculares de igual manera que entre proposiciones atómicas. Obsérvese que en muchas proposiciones se necesitan paréntesis para indicar cuál es el término de enlace dominante.

a.

(1)	$Q \vee R$	P
(2)	$\neg R$	P
(3)	Q	TP 1, 2

b.

(1)	$(P \& Q) \vee S$	P
(2)	$\neg S$	P
(3)	$P \& Q$	TP 1, 2

c. (1) $\neg S \vee T$ P
(2) $\neg T$ P
(3) $\neg S$ TP 1, 2

d. (1) $\neg P \vee \neg Q$ P
(2) $\neg\neg P$ P
(3) $\neg Q$ TP 1, 2

e. (1) $(P \,\&\, Q) \vee (R \,\&\, S)$ P
(2) $\neg(P \,\&\, Q)$ P
(3) $R \,\&\, S$ TP 1, 2

Se usa también el hecho de ser P la negación de $\neg P$ al aplicar *modus tollendo ponens,* como se muestra en los ejemplos siguientes.

a. (1) $Q \vee \neg R$ P
(2) R P
(3) Q TP 1, 2

b. (1) $\neg(P \,\&\, Q) \vee S$ P
(2) $P \,\&\, Q$ P
(3) S TP 1, 2

c. (1) $\neg S \vee T$ P
(2) S P
(3) T TP 1, 2

Ejercicio 8

A. ¿Qué conclusión, en forma de proposición escrita en castellano, se puede deducir de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes utilizando la regla TP?

1. Este hombre o es un abogado o es un político. No es un abogado.
2. El puerto de Nueva Orleans o está en el golfo de Méjico o está en el océano Atlántico. No está en el océano Atlántico.
3. O la energía interna de un átomo puede cambiar con continuidad o cambia sólo a saltos. La energía interna de un átomo no puede cambiar con continuidad.
4. Juan o ha terminado el libro o no ha ido a devolverlo hoy a la biblioteca. Juan no ha terminado el libro.
5. O hace frío y llueve o el festival se celebrará al aire libre. Ni hace frío ni llueve.

B. Deducir una conclusión de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas usando el *modus tollendo ponens.*

1. (1) $\neg Q \vee R$ P
(2) $\neg R$ P

2. (1) $T \vee (P \rightarrow Q)$ P
(2) $\neg T$ P

3. (1) $\neg T \vee \neg R$ P
(2) $\neg\neg R$ P

4. (1) $P \vee Q$ P
(2) $\neg Q$ P

5. (1) $(S \& T) \vee R$ P
   (2) $\neg(S \& T)$ P

6. (1) $(P \& Q) \vee S$ P
   (2) $\neg S$ P

7. (1) $\neg Q \vee R$ P
   (2) $\neg\neg Q$ P

8. (1) $\neg T$ P
   (2) $T \vee \neg S$ P

9. (1) $\neg(P \& Q)$ P
   (2) $T \vee (P \& Q)$ P

10. (1) $T \vee U$ P
    (2) $\neg T$ P

11. (1) $S \vee \neg T$ P
    (2) T P

12. (1) $\neg(S \& R) \vee T$ P
    (2) $S \& R$ P

13. (1) $\neg(P \rightarrow Q) \vee R$ P
    (2) $P \rightarrow Q$ P

C. Demostrar que las conclusiones son consecuencia de las premisas dadas en los ejercicios que siguen. Dar una demostración completa.

1. Demostrar: P
   (1) $P \vee Q$ P
   (2) $\neg T$ P
   (3) $Q \rightarrow T$ P

2. Demostrar: B
   (1) $\neg A \vee B$ P
   (2) $\neg A \rightarrow E$ P
   (3) $\neg E$ P

3. Demostrar: M
   (1) $S \& P$ P
   (2) $M \vee \neg N$ P
   (3) $S \rightarrow N$ P

4. Demostrar: $A \& B$
   (1) B P
   (2) $B \rightarrow \neg D$ P
   (3) $A \vee D$ P

5. Demostrar: H
   (1) $\neg S$ P
   (2) $S \vee (H \vee G)$ P
   (3) $\neg G$ P

6. Demostrar: P
   (1) $T \rightarrow P \vee Q$ P
   (2) $\neg\neg T$ P
   (3) $\neg Q$ P

7. Demostrar: R
   (1) $\neg Q \vee S$ P
   (2) $\neg S$ P
   (3) $\neg(R \& S) \rightarrow Q$ P

D. Primero simbolizar las premisas y conclusiones siguientes. Después demostrar que las conclusiones son consecuencia lógica de las premisas. Recuérdese que cuando las proposiciones atómicas están ya simbolizadas por símbolos matemáticos, no hace falta utilizar letras mayúsculas. Conservar las proposiciones atómicas con sus símbolos matemáticos y simbolizar los términos de enlace.

1. O $x=y$ o $x=z$.
   Si $x=z$ entonces $x=6$.
   No es $x=6$.
   Por tanto, $x=y$.
2. A la vez $1+1=2$ y $2+1=3$.
   O $3-2=1$ o no ocurre que $2-1=1$.
   Si $1+1=2$ entonces $2-1=1$.
   Por tanto, $3-2=1$.
3. Si $0\neq x$ entonces $x\neq y$.
   O $x=y$ o $x=z$. $x\neq z$.
   Por tanto, $x=0$.
4. O $x=0$ o $x=y$.
   Si $x=y$ entonces $x=z$. $x\neq z$.
   Por tanto, $x=0$.
5. Si $x=y$ entonces $x=z$.
   Si $x=z$ entonces $x=w$.
   O $x=y$ o $x=0$.
   Si $x=0$ entonces $x+u=1$. $x+u\neq 1$.
   Por tanto, $x=w$.

● 2.3 *Deducción proposicional*

Hemos aprendido algunas reglas de buena inferencia que permiten pasar lógicamente de un conjunto de afirmaciones a otra afirmación. De la proposición $\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{Q}$ y la proposición $\mathbf{P}$, por ejemplo, se puede deducir la proposición $\mathbf{Q}$.

Se ha visto también que se puede demostrar que una conclusión se deduce lógicamente de un conjunto de premisas, aún cuando no se pueda ir directamente de las premisas a la conclusión en un solo paso. Yendo por pasos sucesivos, cada uno permitido por una regla, es posible alcanzar la conclusión deseada. Si es así, se ha *demostrado* que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas dadas.

Con el manejo de unas pocas reglas, empezamos a aprender el método de las *deducciones formales*. Es decir, hemos aprendido el camino preciso de demostrar que los razonamientos son válidos. Un *razonamiento* es simplemente un conjunto de proposiciones como premisas y una conclusión deducida de estas premisas. Cuando decimos que es *válido* entendemos que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas. Una deducción formal es una serie de proposiciones o pasos, en la cual cada paso o es una premisa o está deducido directamente de los pasos que le preceden por medio de una determinada regla.

En la introducción a este capítulo, se comparaban las reglas de la Lógica a las de un juego; y se puede imaginar la deducción como la realización de un juego. Se han aprendido reglas suficientes para hacer una deducción simple. La deducción o demostración es el juego y las reglas del juego son precisamente las reglas de inferencia. Se puede hacer cualquier movimiento, dar cualquier paso que está permitido por una regla, y se ha de poder justificar cada paso dado indicando la regla seguida. El objetivo que nos proponemos alcanzar en este juego es la conclusión establecida. El propósito de cada movimiento que se hace, es avanzar un paso acercándose al objetivo. La posición de partida con la que se inicia el juego es un conjunto de premisas. Las premisas están justificadas por la *regla de premisas* que es:

> Una premisa puede ser introducida en cualquier punto de una deducción.

La aplicación de las reglas no depende del uso que se haya hecho de las mismas en líneas anteriores.

La regla de las premisas se ha utilizado ya al principio de las deducciones. Como esta regla es familiar, la P para la regla de premisas se omitirá corrientemente cuando se da un problema en forma simbolizada. En deducciones formales, sin embargo, se escribirá una P antes de cada premisa dada, para indicar que las líneas están justificadas por la regla de premisas.

Resumiendo, se empieza con un conjunto de premisas y el objeto es pasar de estas premisas a una conclusión particular. Cada movimiento que se hace, cada línea que se escribe debajo, ha de ser permitido por una regla de inferencia definida.

Hemos aprendido a efectuar deducciones simples. Ahora se considerarán algunas deducciones complicadas.

Consideremos el razonamiento del siguiente ejemplo:

Ejemplo a.

Si la ballena es un mamífero entonces toma oxígeno del aire. Si toma su oxígeno del aire, entonces no necesita branquias. La ballena es un mamífero y vive en el océano. Por tanto, no necesita branquias.

La conclusión que se desea demostrar o deducir es la proposición «no necesita branquias». (La palabra, «por tanto», pone de manifiesto que la proposición final es la conclusión del razonamiento.)

El primer paso en este proceso es simbolizar el razonamiento de manera que la deducción sea perfectamente clara.

Sea

$W =$ «La ballena es un mamífero»
$O =$ «Toma su oxígeno del aire»
$G =$ «Necesita branquias»
$H =$ «Habita en el océano».

Entonces

la primera premisa es	$W \to O$
la segunda premisa es	$O \to \neg G$
la tercera premisa es	$W \ \& \ H$
la conclusión es	$\neg G$.

La deducción proposicional se puede escribir como se indica a continuación:

(1)	$W \to O$	P
(2)	$O \to \neg G$	P
(3)	$W \ \& \ H$	P
(4)	W	S 3
(5)	O	PP 1, 4
(6)	$\neg G$	PP 2, 5

Los tres primeros pasos son premisas. Los pasos 4, 5 y 6 están justificados por reglas de inferencia aplicadas a líneas anteriores. A la derecha de cada paso o línea, se indica la manera como se justifica aquella línea. Por ejemplo, puesto que las tres primeras líneas son premisas, se escribe la letra P a la derecha de aquellas líneas. Estas líneas son dadas y no deducidas y, por tanto, no necesitan ninguna otra justificación.

La línea 4 se deduce de la línea 3 por la regla de simplificación. Por tanto, se escribe la abreviatura de la regla S a la derecha de aquella línea, seguida del número de la línea de la que se ha deducido. La línea 5 se obtiene de las líneas 1 y 4 por *modus ponendo ponens*. Considerando la línea 1, $W \to O$, y la línea 4, W, se puede ver rápidamente que *modus ponendo ponens* nos permite obtener O. Este movimiento se indica por la abreviatura del nombre de la regla PP, y el número de las líneas de las que se ha deducido la línea 5. De forma análoga se indica que la línea 6 se ha deducido por *modus ponendo ponens* de las líneas 2 y 5.

Puesto que la línea 6 representa la conclusión deseada, objetivo de nuestra deducción, la deducción es completa. Se ha demostrado que $\neg G$ es consecuencia lógica de las tres premisas del razonamiento. Así, puesto que $\neg G$ representa la proposición «No necesita branquias» en el razonamiento puesto como ejemplo se ha demostrado que la conclusión de aquel razonamiento es válida. Este es un ejemplo de una *deducción formal*.

A fin de que cada paso de la demostración resulte perfectamente claro a todos aquellos que lo lean, nos atendremos estrictamente a la forma indicada para hacer deducciones. No se olvide que un objetivo de la Lógica es ser preciso. Para estar seguro de la precisión, anótese cada paso que se efectúe y el por qué está permitido. Para cada paso, escríbase primero el número de aquella línea, después la proposición misma, y finalmente lo que justifica aquel paso por la abreviatura de la regla que lo ha permitido. Si el paso está deducido de otras líneas por una regla, entonces añádase el número o números de las líneas de las que se ha deducido.

Consideremos el siguiente razonamiento:

Ejemplo b.

> Si la enmienda no fue aprobada entonces la Constitución queda como estaba. Si la Constitución queda como estaba entonces no podemos añadir nuevos miembros al comité. O podemos añadir nuevos miembros al comité o el informe se retrasará un mes. Pero el informe no se retrasará un mes. Por tanto la enmienda fue aprobada.

Sea,

A = «La enmienda fue aprobada»
C = «La Constitución queda como estaba»
M = «Podemos añadir nuevos miembros al comité»
R = «El informe se retrasará un mes».

Entonces;

(1)	$\neg A \rightarrow C$	P
(2)	$C \rightarrow \neg M$	P
(3)	$M \vee R$	P
(4)	$\neg R$	P
(5)	M	TP 3, 4
(6)	$\neg C$	TT 2, 5
(7)	A	TT 1, 6

La conclusión del razonamiento es «La enmienda fue aprobada». El objetivo entonces es mostrar que la conclusión es consecuencia lógica de las cuatro premisas del razonamiento. *Primero* se indican las letras con que se simboliza cada una de las proposiciones atómicas. *Después* se simboliza cada una de las cuatro premisas y se indica que están justificadas en la demostración poniendo junto a cada una la letra «P». Las premisas son las cuatro primeras líneas en la demostración.

El movimiento *siguiente* es el intentar obtener la conclusión, que es **A**, utilizando las reglas aprendidas. La línea 5 se obtiene de las líneas 3 y 4 por *modus tollendo ponens,* TP. La línea 6 se deduce de las líneas 2 y 5 por *modus tollendo tollens, TT.* La línea 7 se obtiene de las líneas 1 y 6 por *modus tollendo tollens.* Se ha mostrado que la conclusión del razonamiento se deduce de las premisas por medio de una deducción formal.

Consideremos la siguiente deducción.

Ejemplo c.

> Si Tomás tiene diecisiete años, entonces Tomás tiene la misma edad que Juana. Si Joaquín tiene distinta edad que Tomás, entonces Joaquín tiene distinta edad que Juana. Tomás tiene diecisiete años y Joaquín tiene la misma edad que Juana. Por tanto, Joaquín tiene la misma edad que Tomás y Tomás la misma que Juana.

Sea

E = «Tomás tiene diecisiete años»
S = «Tomás tiene la misma edad que Juana»
T = «Joaquín tiene la misma edad que Tomás»
J = «Joaquín tiene la misma edad que Juana».

Entonces

(1)	$E \rightarrow S$	P
(2)	$\neg T \rightarrow \neg J$	P
(3)	$E \ \& \ J$	P
(4)	E	S 3
(5)	S	PP 1, 4
(6)	J	S 3
(7)	T	TT 2, 6
(8)	$T \ \& \ S$	A 5, 7

EJERCICIO 9

A. En cada uno de los ejemplos siguientes demostrar que la conclusión es consecuencia de las premisas dadas. Hacer cada deducción exactamente igual a como se han hecho las deducciones en los ejemplos anteriores, con líneas numeradas, abreviaturas para cada regla utilizada, e indicando además los números de las líneas empleadas para la deducción de cada paso.

1. Si esta es una sociedad matriarcal, entonces el hermano de la madre es el cabeza de familia. Si el hermano de la madre es el cabeza de familia, entonces el padre no tiene autoridad. Esta es una sociedad matriarcal. Por tanto, el padre no tiene autoridad.
2. O esta roca es una roca ígnea o es una roca sedimentaria. Esta roca es granito. Si esta roca es granito entonces no es una roca sedimentaria. Por tanto, esta roca es una roca ígnea.
3. Si Juan es más alto que Pedro, entonces María es más baja que Juana. María no es más baja que Juana. Si Juan y Luis tienen la misma estatura, entonces Juan es más alto que Pedro. Por tanto, Juan y Luis no tienen la misma estatura.
4. Si A ganó la carrera, entonces o B fue el segundo o C fue el segundo. Si B fue el segundo, entonces A no ganó la carrera. Si D fue el segundo, entonces C no fue el segundo. A ganó la carrera. Entonces, D no fue el segundo.
5. Si el reloj está adelantado, entonces Juan llegó antes de las diez y vio partir el coche de Andrés. Si Andrés dice la verdad, entonces Juan no vio partir el coche de Andrés. O Andrés dice la verdad o estaba en el edificio en el momento del crimen. El reloj está adelantado. Por tanto, Andrés estaba en el edificio en el momento del crimen.

B. En los ejercicios que siguen, las premisas están ya en forma simbólica Dar una deducción completa de la proposición que sea desea demostrar.

1. Demostrar: Q
   (1) $S \rightarrow (P \vee Q)$
   (2) S
   (3) $\neg P$

2 Demostrar: R
   (1) $S \rightarrow \neg T$
   (2) T
   (3) $\neg S \rightarrow R$

3. Demostrar: $S \ \& \ T$
   (1) $P \ \& \ R$
   (2) $P \rightarrow S$
   (3) $R \rightarrow T$

4. Demostrar: $\neg S$
   (1) $T \rightarrow R$
   (2) $R \rightarrow \neg S$
   (3) T

5. Demostrar: T
   (1) $P \rightarrow S$
   (2) $\neg S$
   (3) $\neg P \rightarrow T$

6. Demostrar: $S \ \& \ T$
   (1) $P \rightarrow S$
   (2) $P \rightarrow T$
   (3) P

7. Demostrar: S
   (1) $P \vee Q$
   (2) $\neg Q$
   (3) $P \rightarrow S$

8. Demostrar: S
   (1) $T \rightarrow R$
   (2) $\neg R$
   (3) $T \vee S$

9. Demostrar: $\neg T$
   (1) $P \rightarrow S$
   (2) $P \;\&\; Q$
   (3) $(S \;\&\; R) \rightarrow \neg T$
   (4) $Q \rightarrow R$

10. Demostrar: $\neg R$
   (1) $S \vee \neg R$
   (2) $T \rightarrow \neg S$
   (3) T

11. Demostrar: S
   (1) $P \rightarrow (Q \;\&\; R)$
   (2) P
   (3) $T \rightarrow \neg Q$
   (4) $T \vee S$

12. Demostrar: $\neg Q$
   (1) $T \vee \neg S$
   (2) S
   (3) $Q \rightarrow \neg T$

13. Demostrar: $Q \vee R$
   (1) $S \rightarrow \neg T$
   (2) T
   (3) $\neg S \rightarrow (Q \vee R)$

14. Demostrar: S
   (1) $\neg T \vee R$
   (2) T
   (3) $\neg S \rightarrow \neg R$

15. Demostrar: $\neg R$
   (1) $Q \;\&\; T$
   (2) $Q \rightarrow \neg R$
   (3) $T \rightarrow \neg R$

C. Dar una demostración formal completa de los razonamientos siguientes:

1. Demostrar: $y+8<12$
   (1) $x+8=12 \quad \vee \quad x \neq 4$
   (2) $x=4 \quad \& \quad y<x$
   (3) $x+8=12 \quad \& \quad v<x \quad \rightarrow \quad y+8<12$

2. Demostrar: $x<4 \quad \& \quad y<6$*
   (1) $x+2<6 \quad \rightarrow \quad x<4$
   (2) $y<6 \quad \vee \quad x+y \nless 10$
   (3) $x+y<10 \quad \& \quad x+2<6$

3. Demostrar: $x=5 \quad \& \quad x \neq y$

---

* Por conveniencia se introducen las notaciones $\nless$ y $\ngtr$ para «no es menor que» y «no es mayor que» de manera que «$\neg(x<y)$» se puede escribir «$x \nless y$» y «$\neg(x>y)$» se puede escribir «$x \ngtr y$».

(1) $x=y \rightarrow x\neq y+3$
(2) $x=y+3 \vee x+2=y$
(3) $x+2\neq y \quad \& \quad x=5$

4. Demostrar: $y>z$
(1) $x=y \rightarrow x=z$
(2) $x\neq y \rightarrow x<z$
(3) $x\nless z \vee y>z$
(4) $y\neq z \quad \& \quad x\neq z$

5. Demostrar: $x<5$
(1) $x<y \vee x=y$
(2) $x=y \rightarrow y\neq 5$
(3) $x<y \quad \& \quad y=5 \rightarrow x<5$
(4) $y=5$

6. Demostrar: $\text{tag}\,\theta\neq 0{,}577$
(1) $\text{tag}\,\theta=0{,}577 \rightarrow \text{sen}\,\theta=0{,}500 \quad \& \quad \cos\theta=0{,}866$
(2) $\text{sen}\,\theta=0{,}500 \quad \& \quad \cos\theta=0{,}866 \rightarrow \cot\theta=1{,}732$
(3) $\sec\theta=1{,}154 \vee \cot\theta\neq 1{,}732$
(4) $\sec\theta\neq 1{,}154$

7. Demostrar: $\neg(y>7 \vee x=y)$
(1) $x<6$
(2) $y>7 \vee x=y \rightarrow \neg(y=4 \quad \& \quad x<y)$
(3) $y\neq 4 \rightarrow x\nless 6$
(4) $x<6 \rightarrow x<y$

8. Demostrar: $x>6$
(1) $x>5 \rightarrow x=6 \vee x>6$
(2) $x\neq 5 \quad \& \quad x\nless 5 \rightarrow x>5$
(3) $x<5 \rightarrow x\neq 3+4$
(4) $x=3+4 \quad \& \quad x\neq 6$
(5) $x=3+4 \rightarrow x\neq 5$

9. Demostrar: $x=4$
(1) $3x+2y=18 \quad \& \quad x+4y=16$
(2) $x=2 \rightarrow 3x+2y\neq 18$
(3) $x=2 \vee y=3$
(4) $x\neq 4 \rightarrow y\neq 3$

10. Demostrar: $x<3$
    (1) $x+2>5 \quad \rightarrow \quad x=4$
    (2) $x=4 \quad \rightarrow \quad x+4 \nless 7$
    (3) $x+4<7$
    (4) $x+2>5 \quad \vee \quad (5-x>2 \quad \& \quad x<3)$

● 2.4 *Más sobre paréntesis*

En el primer capítulo se aprendió que los paréntesis hacen el mismo papel en Lógica que ciertos símbolos de puntuación y ciertas palabras hacen en nuestro lenguaje cuotidiano. Los paréntesis indican el agrupamiento en proposiciones moleculares, en las que distintas agrupaciones pueden dar lugar a distintos significados. Por ejemplo, una proposición simbolizada en la forma:

$$(\mathsf{A} \ \& \ \mathsf{B}) \vee \mathsf{C}$$

no tiene el mismo significado que una proposición simbolizada en la forma:

$$\mathsf{A} \ \& \ (\mathsf{B} \vee \mathsf{C}).$$

En el segundo agrupamiento se está cierto de que se presenta **A**, y se está cierto también que o **B** o **C** se presenta. En el primer agrupamiento no se está cierto de ninguna de las proposiciones. Sólo se sabe que o **A** & **B** o **C** se presenta.

Al deducir conclusiones de conjuntos de premisas es esencial el uso correcto de los paréntesis, pues de otra forma no se puede estar seguro de la aplicación de las reglas. Sea, por ejemplo, la proposición:

$$\mathsf{A} \ \& \ \mathsf{Q} \vee \mathsf{R}.$$

Sin paréntesis que indiquen el agrupamiento, no se puede decir cuál es el término de enlace dominante ni se puede decir si la proposición es una conjunción o una disjunción. No se puede saber, pues, si se puede utilizar la ley de simplificación o quizá el *modus tollendo ponens*.

Se puede indicar el término de enlace dominante utilizando paréntesis. Si la proposición está agrupada en la forma:

$$(\mathsf{P} \ \& \ \mathsf{Q}) \vee \mathsf{R}$$

entonces es una disjunción y el término de enlace dominante es «o». Es la disjunción cuyo primer miembro es una proposición molecular (una conjunción) y cuyo segundo miembro es una proposición atómica. Si está agrupada

(2) $$P \ \& \ (Q \lor R)$$

entonces es una conjunción. Se podría aplicar la regla de simplificación a la proposición (2) y deducir P, pero *no* se puede deducir P de la proposición (1). Tanto el significado de los proposiciones como la aplicación correcta de las reglas de inferencia dependen del uso correcto de los paréntesis.

Indicado el agrupamiento de las proposiciones simbolizadas, el paréntesis nos mostrará cuál es el término de enlace dominante en la proposición. Se recordará que el término de enlace condicional es más fuerte que los de conjunción, disjunción o negación. Cuando se presenta en una proposición con cualquiera de los otros, no es necesario el paréntesis para indicar que es el término de enlace dominante. Como «o» e «y» son igualmente fuertes se necesita paréntesis para indicar cuál es el dominante. Ambos «y» y «o» son más fuertes que «no», de manera que $\neg$ se aplica sólo a la proposición más corta delante de la que está colocado, *salvo* que un paréntesis indique que se aplica a una proposición molecular más larga, como ocurre en las proposiciones siguientes:

$$\neg(P \rightarrow Q)$$

y

$$\neg(P \lor Q).$$

EJERCICIO 10

A. ¿Tiene la proposición $\neg Q \ \& \ R$ distinto significado que la proposición $\neg(Q \ \& \ R)$? En caso afirmativo, explicar la diferencia.

B. Supóngase que una proposición ha sido simbolizada en la forma: $(\neg Q \ \& \ R)$ ¿Tiene esta proposición el mismo significado que alguna de las del ejercicio **A**?

C. Se supone que se ha dado como primera premisa la proposición $P \rightarrow Q \lor R$. La segunda premisa es la proposición $\neg(Q \lor R)$. ¿Se puede deducir una conclusión de estas premisas? ¿Se puede cambiar de sitio el paréntesis de la segunda premisa y deducir una conclusión? Justificar la respuesta.

D. En cada una de las proposiciones siguientes, indicar cuál es el término de enlace dominante y qué clase de proposición es (conjunción, disjunción, negación o condicional).

1. $\neg R \lor S$
2. $P \to Q \ \& \ R$
3. $(P \to Q) \ \& \ R$
4. $A \ \& \ B \to C$
5. $P \lor (R \ \& \ S)$
6. $\neg(Q \ \& \ R)$
7. $(P \ \& \ Q) \lor (R \ \& \ S)$
8. $(A \to B) \ \& \ (B \to C)$
9. $\neg A \to B \lor C$
10. $\neg(P \to Q)$
11. $(A \ \& \ B) \lor C$
12. $(P \ \& \ Q) \to (A \ \& \ B)$
13. $\neg(P \to Q \ \& \ R)$
14. $P \to Q \lor R$
15. $(P \to Q) \lor R$

E. Completar la simbolización de las proposiciones siguientes añadiendo paréntesis donde sea necesario, de manera que la proposición simbolizada corresponda al nombre que se le ha dado.

1.	$P \to R \ \& \ S$	A conjunción
2.	$P \ \& \ R \lor S$	A conjunción
3.	$A \ \& \ B \to C$	A condicional
4.	$P \ \& \ R \lor S$	A disjunción
5.	$\neg P \to R$	A condicional
6.	$\neg P \to R$	A negación
7.	$\neg P \ \& \ \neg R$	A conjunción
8.	$\neg P \ \& \ R$	A negación
9.	$A \to B \lor C$	A disjunción
10.	$A \to B \lor C$	A condicional
11.	$\neg P \lor Q$	A negación
12.	$\neg P \lor Q$	A disjunción
13.	$P \to Q \ \& \ R \to S$	A conjunción
14.	$\neg\neg A \to B$	A negación
15.	$\neg P \lor \neg Q$	A disjunción

F. Para cada uno de los conjuntos de premisas siguientes se ha establecido una conclusión. En algunos casos, la conclusión es consecuencia lógica sólo si se añaden paréntesis que indiquen la agrupación adecuada. Añadir los paréntesis cuando sean necesarios a fin de hacer la conclusión válida.

1.

$P \to Q \ \& \ R$	Premisa
R	Conclusión

2.

$P \to Q \ \& \ R$	Premisa
$\neg Q \ \& \ R$	Premisa
$\neg P$	Conclusión

3. $\frac{Q \ \& \ P \lor S}{Q}$ Premisa / Conclusión

4. $P \rightarrow Q \ \& \ S$ Premisa
$\frac{P}{Q \ \& \ S}$ Premisa / Conclusión

• 2.5 *Otras reglas de inferencia*

La lista de reglas dadas hasta aquí es un poco corta y esto limita un poco los tipos de deducciones que pueden hacerse. Con algunas reglas más estaríamos en condiciones de efectuar más demostraciones. Se recordará que las reglas dadas permiten pasar de ciertas proposiciones a otras proposiciones que son consecuencia de ellas. Siempre que las primeras proposiciones sean ciertas, las proposiciones que se deducen por las reglas de la Lógica son también ciertas.

Ley de adición. La *ley de adición* expresa el hecho que si se tiene una proposición que es cierta, entonces la disjunción de aquella proposición y otra cualquiera ha de ser también cierta. Si se da la proposición P, entonces la proposición $P \lor Q$ es consecuencia.

Para justificarlo, recuérdese el significado de una disjunción. La disjunción $P \lor Q$ indica que por lo menos una de las dos proposiciones ligadas por el término de enlace «o» ha de ser cierta. Recuérdese que *sólo* una ha de ser necesariamente cierta. *Puesto que se ha dado* P *como proposición cierta, se sabe que* $P \lor Q$ *ha de ser una proposición cierta;* y esto es precisamente lo que se entiende por una conclusión lógica válida. Cuando una premisa es cierta, la conclusión que se sigue de ella *ha* de ser cierta.

Con ejemplos en lenguaje ordinario se ve lo obvia que es esta regla. Si, como premisa cierta, se ha dado:

Este libro es azul,

entonces se sabe que la proposición siguiente ha de ser cierta.

O este libro es azul o es rojo.

Se puede también concluir:

O este libro es azul o es viejo

o

O este libro es azul o es nuevo,

y así sucesivamente. En todos estos ejemplos una parte es cierta y esto es todo lo que se necesita para que una disjunción sea cierta.

En forma simbólica, si se tiene la proposición P, se puede concluir $P \vee Q$, o $P \vee R$, o $S \vee P$, o $T \vee P$, y así sucesivamente. La abreviatura para la ley de adición es LA.

Ejemplos de la ley de adición son:

a. (1) Q P
(2) $Q \vee \neg R$ LA 1

b. (1) $\neg R$ P
(2) $S \vee \neg R$ LA 1

c. (1) $T \ \& \ S$ P
(2) $(T \ \& \ S) \vee R$ LA 1

d. (1) $T \vee R$ P
(2) $(P \ \& \ S) \vee (T \vee R)$ LA 1

Obsérvese que el orden en que se usan no importa. De P se puede deducir $P \vee Q$ o se puede deducir $Q \vee P$.

Ejercicio 11

A. Dar cinco proposiciones que resulten de la premisa siguiente

Algunos juegos son fáciles de aprender.

B. Si las conclusiones son consecuencia de las premisas en los ejemplos que siguen, escribir la palabra «válido». Si es válido, completar la demostración indicando la regla o reglas usadas y las líneas a las que se ha aplicado una regla. Si no se ha aplicado una regla de inferencia de las aprendidas, póngase una «X» junto a la conclusión.

1. (1) P P
Por tanto: $P \vee Q$

2. (1) Q P
Por tanto: $Q \vee \neg R$

3. (1) P P
(2) $P \vee Q \rightarrow R$ P
Por tanto: R

4. (1) $Q \vee R \rightarrow S$ P
(2) R P
Por tanto: S

5. (1) T P
   (2) $S \vee T \rightarrow Q$
   Por tanto: Q
6. (1) $\neg R$ P
   (2) $\neg S \vee \neg R \rightarrow \neg P$ P
   Por tanto: $\neg P$
7. (1) $\neg T$ P
   Por tanto: $\neg T \vee \neg P$
8. (1) $\neg P$ P
   Por tanto: $Q \vee \neg P$
9. (1) P P
   Por tanto: $P \mathbin{\&} \neg Q$
10. (1) $R \mathbin{\&} S \rightarrow T$ P
    (2) R
    Por tanto: T

C. Indicar una deducción de las conclusiones que siguen de los conjuntos de premisas dados. Hacer una demostración formal, indicando el número de cada paso, la justificación de cada línea mediante la abreviatura de la regla utilizada y los números de las líneas de las que se deduce cada paso.

1. Demostrar: $T \vee S$
   (1) $Q \vee T$
   (2) $Q \rightarrow R$
   (3) $\neg R$
2. Demostrar: $R \vee \neg T$
   (1) P
   (2) $\neg R \rightarrow \neg P$
3. Demostrar: $R \vee \neg S$
   (1) $S \mathbin{\&} Q$
   (2) $T \rightarrow \neg Q$
   (3) $\neg T \rightarrow R$
4. Demostrar: Q
   (1) $\neg S$
   (2) $T \rightarrow S$
   (3) $\neg T \vee R \rightarrow Q$
5. Demostrar: U
   (1) $P \mathbin{\&} \neg T$
   (2) $S \rightarrow T$
   (3) $S \vee Q$
   (4) $Q \vee P \rightarrow U$
6. Demostrar: $T \vee Q$
   (1) $S \rightarrow P \mathbin{\&} Q$
   (2) S
   (3) $P \mathbin{\&} Q \rightarrow T$

D. Dar una demostración formal de los siguientes razonamientos:

1. Demostrar: $y \nless 4 \ \vee \ x > 2$
   (1) $x > 3 \ \vee \ y \nless 4$
   (2) $x > 3 \ \rightarrow \ x > y$
   (3) $x \ngtr y$

2. Demostrar: $x>y \lor y \nless 6$
   (1) $x>y \lor x>5$
   (2) $x \ngtr 5 \lor y \nless 6$
   (3) $x+y=1 \ \& \ x>y$

3. Demostrar: $x \neq 3 \lor x>2$
   (1) $x+2 \neq 5 \lor 2x=6$
   (2) $x+2 \neq 5 \rightarrow x \neq 3$
   (3) $2x-2=8 \rightarrow 2x \neq 6$
   (4) $x+3=8 \ \& \ 2x-2=8$

4. Demostrar: $\operatorname{tag} 30° = 0{,}577 \lor \cos 60° = 0{,}5$
   (1) $\operatorname{sen} 30° = 0{,}5 \rightarrow \csc 30° = 2{,}0$
   (2) $\operatorname{sen} 30° = 0{,}5$
   (3) $\csc 30° = 2{,}0 \rightarrow \operatorname{tag} 30° = 0{,}577$

5. Demostrar: $x=5 \ \& \ x \neq 4$
   (1) $x=2 \rightarrow x<3$
   (2) $x \neq 4 \ \& \ x \nless 3$
   (3) $x \neq 2 \lor x>4 \rightarrow x=5$

6. Demostrar: $x=2$
   (1) $Dx^3=3x^2 \ \& \ D3=0$
   (2) $Dx^3=3x^2 \rightarrow Dx^2=2x$
   (3) $Dx^2=2x \lor Dx^3=12 \rightarrow x=2$

7. Demostrar: $x-3$
   (1) $x-2=1 \ \& \ 2-x \neq 1$
   (2) $x=1 \rightarrow 2-x=1$
   (3) $x=1 \lor x+2=5$
   (4) $x+2=5 \lor x-2=1 \rightarrow x=3$

8. Demostrar: $y=x \lor y>x$
   (1) $y<6 \rightarrow y<x$
   (2) $y \nless 6 \lor x=5 \rightarrow y>x$
   (3)

9. Demostrar: $y<3 \lor x>5$
   (1) $y<4 \ \& \ x=y+3$
   (2) $\neg(x \neq y+3) \rightarrow x>2$
   (3) $y \ngtr 2 \rightarrow x \ngtr 2$
   (4) $y>2 \lor y=3 \rightarrow x>5$

$y \nless x$

10. Demostrar: $(x=4 \quad \vee \quad y \neq 8) \quad \& \quad x<3$
    (1) $x=y \quad \vee \quad x<y$
    (2) $y=x+4$
    (3) $(x<3 \quad \vee \quad x>5) \quad \& \quad y=x+4 \quad \rightarrow \quad y \neq 8$
    (4) $x \neq y$
    (5) $y=6 \quad \vee \quad x<y \quad \rightarrow \quad x<3$

Ley del silogismo hipotético. Primero examinaremos un ejemplo de la *ley del silogismo hipotético,* cuya abreviatura es HS. De las premisas

(1) Si hace calor, entonces Juana va a nadar.
(2) Si Juana va a nadar, entonces arregla la casa después de comer.

Se puede concluir:

(3) Si hace calor, entonces arregla la casa después de comer.

Para simbolizar el razonamiento, sea

D = «Hace calor»
S = «Juana va a nadar»
H = «Arregla la casa después de comer».

Entonces

(1)	$\mathsf{D} \rightarrow \mathsf{S}$	P
(2)	$\mathsf{S} \rightarrow \mathsf{H}$	P
(3)	$\mathsf{D} \rightarrow \mathsf{H}$	HS

La conclusión es una proposición condicional. Ambas premisas son proposi ciones condicionales. La conclusión no dice que hace calor ni que Juana arregla la casa después de comer. Sólo dice lo que ocurrirá *si* hace calor. Considérense las dos premisas e imagínese que el antecedente de la primera premisa es cierto. Si es así, entonces el consecuente de la segunda se deduciría con seguridad. Esto es exactamente lo que dice la conclusión condicional. Simbólicamente, si se tiene la proposición $\mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{S}$ y la proposición $\mathsf{S} \longrightarrow \mathsf{H}$ y si también se tuviera la proposición D, entonces se podría aplicar *modus ponendo ponens* dos veces y obtener H. Abreviadamente, si es D entonces es H, o $\mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{H}$. Pero esto es precisamente lo que se concluye de $\mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{S}$ y $\mathsf{S} \longrightarrow \mathsf{H}$ mediante HS.

En forma simbólica, la ley del silogismo hipotético es:

de	
y	$\mathsf{Q} \longrightarrow \mathsf{R}$
se puede concluir	$\overline{\mathsf{P} \longrightarrow \mathsf{R}}$

Puede resultar conveniente considerar que para aplicar la regla HS, se dan los tres pasos siguientes. Primero, se hace una inspección general para comprobar que se tienen las dos condicionales requeridas. Segundo, se comprueba cuidadosamente que el antecedente de una de las condicionales coincida con el consecuente de la otra. Tercero, se forma como conclusión una condicional cuyo antecedente es el otro antecedente de una de las premisas y cuyo consecuente es el consecuente de la otra premisa.

En los ejemplos de la ley del silogismo hipotético dados a continuación, obsérvese que algunos de los antecedentes y consecuentes son proposiciones moleculares. La forma, sin embargo, es la misma.

a.	(1)	$\neg P \rightarrow \neg Q$	P
	(2)	$\neg Q \rightarrow \neg R$	P
	(3)	$\neg P \rightarrow \neg R$	HS 1, 2
b.	(1)	$\neg P \rightarrow Q \vee R$	P
	(2)	$Q \vee R \rightarrow \neg T$	P
	(3)	$\neg P \rightarrow \neg T$	HS 1, 2
c.	(1)	$S \rightarrow T$	P
	(2)	$T \rightarrow R \vee Q$	P
	(3)	$S \rightarrow R \vee Q$	HS 1, 2
d.	(1)	$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$	P
	(2)	$R \rightarrow (Q \ \& \ T)$	P
	(3)	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \ \& \ T)$	HS 1, 2

Ejercicio 12

A. ¿Qué conclusión se puede sacar, si se puede sacar alguna, por la ley de silogismo hipotético de los conjuntos de proposiciones siguientes?

1. Si el agua se hiela, entonces sus moléculas forman cristales. Si las moléculas forman cristales, entonces el agua aumenta de volumen.
2. Si Tomás conduce a la velocidad de 50 km/h, entonces en 9 horas habrá recorrido 450 km.
   Si en 9 horas ha recorrido 450 km, entonces habrá recorrido 90 km más que ayer en el mismo período.
3. Si Mr. Lincoln es elegido, entonces los Estados del Sur se separarán con seguridad. Si los Estados del Sur se separan, entonces estallará una guerra civil.

4. Si un haz fino de fotones penetra en un gas en una cámara de niebla, entonces los fotones expulsan electrones de los átomos del gas. Si los fotones expulsan electrones de átomos de gas, entonces la energía de la luz se convierte en energía cinética de los electrones.
5. Si el número de representantes en el Senado está en relación con la población de cada Estado, entonces Nueva York tiene más senadores que Nevada. Si Nueva York tiene más senadores que Navada, entonces Nueva York tiene más de dos senadores.

B. Traducir los razonamientos en la Sección **A** anterior en símbolos lógicos y demostrar que su conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

C. El ejemplo 5 en la Sección **A** anterior muestra el carácter *hipotético* de las premisas de un silogismo hipotético. Las premisas son todas ciertas en este ejemplo. Pero, ¿qué se puede decir acerca de la verdad de hecho de las proposiciones atómicas del Ejemplo 5? Se puede añadir una premisa más, que se sabe que es una proposición cierta *(de hecho)*, al razonamiento en el ejemplo 5, de forma que se puede probar que sus proposiciones atómicas no son proposiciones ciertas. Indicar cómo se podría probar la negación de aquellas proposiciones atómicas por medio de una demostración simbólica formal.

D. Utilizar la ley del silogismo hipotético (HS) en una demostración formal para obtener una conclusión de los siguientes conjuntos de premisas.

1. (1) $Q \rightarrow \neg P$
   (2) $\neg P \rightarrow R$
2. (1) $P \rightarrow R \ \& \ \neg S$
   (2) $R \ \& \ \neg S \rightarrow T$
3. (1) $S \vee T \rightarrow R \vee Q$
   (2) $R \vee Q \rightarrow \neg P$
4. (1) $S \rightarrow \neg T$
   (2) $\neg T \rightarrow \neg R$

E. Indicar una deducción formal de las siguientes conclusiones a partir de las premisas dadas.

1. Demostrar: $\neg T$
   (1) $(Q \rightarrow R) \ \& \ P$
   (2) $R \rightarrow T$
   (3) $(Q \rightarrow R) \rightarrow \neg T$
2. Demostrar: P
   (1) $\neg R$
   (2) $\neg P \rightarrow Q$
   (3) $Q \rightarrow R$
3. Demostrar: Q
   (1) $\neg R \rightarrow S$
   (2) $S \rightarrow P \ \& \ Q$
   (3) $R \rightarrow T$
   (4) $\neg T$

F. Dar demostraciones formales de los siguientes razonamientos.

1. Demostrar: $(2+2)+2=6 \rightarrow 3+3=6$
   (1) $(2+2)+2=6 \rightarrow 3\times 2=6$
   (2) $3\times 2=6 \rightarrow 3+3=6$

2. Demostrar: $5x-4=3x+4 \rightarrow x=4$
   (1) $5x-4=3x+4 \rightarrow 5x=3x+8$
   (2) $2x=8 \rightarrow x=4$
   (3) $5x=3x+8 \rightarrow 2x=8$

3. Demostrar: $z>6 \vee z<y$
   (1) $x>y \rightarrow x>z$
   (2) $\neg(z>6) \rightarrow \neg(x>y \rightarrow z<7)$
   (3) $x>z \rightarrow z<7$

4. Demostrar: $x=6 \vee x>6$
   (1) $x\neq y \rightarrow y<x$
   (2) $(x>5 \rightarrow y<x) \rightarrow y=5$
   (3) $y\neq 5 \vee x=6$
   (4) $x>5 \rightarrow x\neq y$

5. Demostrar: $x>y$
   (1) $x\neq y \rightarrow x>y \vee x<y$
   (2) $x>y \vee x<y \rightarrow x\neq 4$
   (3) $x<y \rightarrow \neg(x\neq y \rightarrow x\neq 4)$
   (4) $x\neq y$

6. Demostrar: $(y\neq 0 \vee x<z) \;\&\; (x<y \rightarrow x=0)$
   (1) $x<y \rightarrow x=0$
   (2) $y=0 \rightarrow x\nless y$
   (3) $x<y \;\&\; z=3$
   (4) $x<y \rightarrow x<z$

7. Demostrar: $\neg(z\neq 5) \vee z>5$
   (1) $x=3 \rightarrow x>y$
   (2) $x\neq 3 \rightarrow z=5$
   (3) $(x=3 \rightarrow x<z) \rightarrow x\nless z$
   (4) $x>y \rightarrow x<z$

8. Demostrar: $x \neq 3 \;\vee\; 4 > x$
   (1) $5x = 20 \;\rightarrow\; x = 4$
   (2) $2x = 6 \;\vee\; x \neq 3$
   (3) $2x = 6 \;\rightarrow\; \neg(5x - 3 = 17 \;\rightarrow\; x = 4)$
   (4) $5x - 3 = 17 \;\rightarrow\; 5x = 20$

9. Demostrar: $y + z = 8$
   (1) $z = 5 \;\rightarrow\; ((y = 3 \;\rightarrow\; y + z = 8) \;\&\; z > y)$
   (2) $(xy + z = 11 \;\rightarrow\; x = 2) \;\rightarrow\; (y = 3 \;\&\; z = 5)$
   (3) $xy = 6 \;\rightarrow\; x = 2$
   (4) $xy + z = 11 \;\rightarrow\; xy = 6$

10. Demostrar: $x + z = 3 \;\rightarrow\; y = 3$
   (1) $(x + y = 5 \;\rightarrow\; y = 3) \;\vee\; x + z = 3$
   (2) $z \neq 1 \;\vee\; (x + z = 3 \;\rightarrow\; x + y = 5)$
   (3) $x + y \neq 5 \;\&\; z = 1$

Ley del silogismo disyuntivo. La *ley del silogismo disyuntivo,* abreviadamente DS, empieza con una disjunción y dos condicionales. Consideremos el ejemplo:

O llueve o el campo está seco.
Si llueve, entonces jugaremos dentro.
Si el campo está seco, entonces jugaremos a baloncesto.

¿Qué conclusión se puede sacar de estas proposiciones? La conclusión es que o jugaremos dentro o jugaremos a baloncesto. La conclusión es otra disjunción.

A continuación se simboliza el razonamiento anterior para obtener un esquema claro de la forma de un silogismo disyuntivo. Sea

R = «Llueve»
D = «El campo está seco»
P = «Jugaremos dentro»
B = «Jugaremos a baloncesto».

Este razonamiento se simboliza:

(1)	R ∨ D	P
(2)	R → P	P
(3)	D → B	P
(4)	P ∨ B	DS

En símbolos, la ley de silogismo disyuntivo se puede expresar

de	$P \vee Q$
y	$P \rightarrow R$
y	$Q \rightarrow S$
se puede deducir	$R \vee S$
o se puede deducir	$S \vee R$.

Puede ser conveniente considerar que para aplicar la regla DS, se han de dar los tres pasos siguientes: Primero, se hace una inspección general para comprobar que se tienen las dos condicionales y la disjunción requeridas. Segundo, se comprueba cuidadosamente que los dos antecedentes de las dos condicionales son precisamente los dos miembros de la disjunción. Tercero, se forma como conclusión una disjunción cuyos miembros son precisamente los dos consecuentes de las dos condicionales.

A continuación se dan varios ejemplos de la ley del silogismo disyuntivo. En la conclusión se puede poner como primero cualquier miembro de la disjunción.

1.	(1)	$\neg P \vee Q$	P
	(2)	$\neg P \rightarrow \neg R$	P
	(3)	$Q \rightarrow S$	P
	(4)	$\neg R \vee S$	DS 1, 2, 3
2.	(1)	$P \vee Q$	P
	(2)	$P \rightarrow \neg R$	P
	(3)	$Q \rightarrow \neg S$	P
	(4)	$\neg S \vee \neg R$	DS 1, 2, 3
3.	(1)	$\neg P \vee \neg Q$	P
	(2)	$\neg P \rightarrow R$	P
	(3)	$\neg Q \rightarrow S$	P
	(4)	$R \vee S$	DS 1, 2, 3
4.	(1)	$P \vee \neg Q$	P
	(2)	$P \rightarrow \neg R$	P
	(3)	$\neg Q \rightarrow S$	P
	(4)	$\neg R \vee S$	DS 1, 2, 3
5.	(1)	$P \vee Q$	P
	(2)	$P \rightarrow R$	P
	(3)	$Q \rightarrow \neg S$	P
	(4)	$\neg S \vee R$	DS 1, 2, 3

EJERCICIO 13

A. ¿Qué se puede concluir de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas por la ley del silogismo disyuntivo? Dar como conclusión una proposición en lenguaje corriente.

1. O Juan tiene mayoría o Pedro tiene mayoría. Si Juan tiene mayoría, entonces Pedro será el tesorero. Si Pedro tiene mayoría, entonces Juan será el tesorero.
2. Este número o es un número positivo o es un número negativo. Si es un número positivo, es mayor que cero. Si es un número negativo, es menor que cero.
3. Esta roca o es piedra caliza o es granito. Si es piedra caliza es sedimentaria. Si es granito, es ígnea.
4. O la cámara fue adquirida legalmente por el vendedor o la cámara es mercancía robada. Si la cámara fue adquirida legalmente por el vendedor, entonces es mi cámara. Si la cámara es mercancía robada, entonces Tomás es su propietario legal.
5. O la planta es una planta verde o es una planta no verde. Si es una planta verde, entonces fabrica su propio elemento. Si es una planta no verde, entonces depende de las materias de otras plantas para su alimento.

B. Simbolizar los razonamientos en la Sección **A** y demostrar que las conclusiones son consecuencia lógica de las premisas.

C. Utilizar la ley del silogismo disyuntivo (DS) para obtener una conclusión de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas:

1. (1) $P \vee \neg Q$
   (2) $\neg Q \rightarrow R$
   (3) $P \rightarrow \neg S$
2. (1) $Q \vee R$
   (2) $Q \rightarrow \neg S$
   (3) $R \rightarrow \neg T$
3. (1) $\neg T \vee \neg S$
   (2) $\neg S \rightarrow P$
   (3) $\neg T \rightarrow Q$
4. (1) $(R \ \& \ S) \vee T$
   (2) $(R \ \& \ S) \rightarrow \neg Q$
   (3) $T \rightarrow P$

D. Dar una deducción completamente formal de las siguientes conclusiones a partir de las premisas dadas:

1. Demostrar: $R \ \& \ (P \vee Q)$
   (1) $P \vee Q$
   (2) $Q \rightarrow R$
   (3) $P \rightarrow T$
   (4) $\neg T$

2. Demostrar: T
   (1) $P \vee \neg R$
   (2) $\neg R \rightarrow S$
   (3) $P \rightarrow T$
   (4) $\neg S$

3. Demostrar: $\neg Q \ \& \ S$
   (1) $S \ \& \ \neg R$
   (2) $R \vee \neg T$
   (3) $Q \rightarrow T$

4. Demostrar: S
   (1) $P \rightarrow Q$
   (2) $Q \rightarrow \neg R$
   (3) R
   (4) $P \vee (T \ \& \ S)$

5. Demostrar: $\neg T \ \& \ \neg P$
   (1) $\neg S \vee \neg R$
   (2) $\neg R \rightarrow \neg T$
   (3) $\neg S \rightarrow P$
   (4) $\neg P$

E. Dar una demostración formal de cada uno de los razonamientos siguientes:

1. Demostrar: $x=3 \ \vee \ x=2$
   (1) $x+y=7 \ \rightarrow \ x=2$
   (2) $y-x=2 \ \rightarrow \ x=3$
   (3) $x+y=7 \ \vee \ y-x=2$

2. Demostrar: $x>2 \ \vee \ x=2$
   (1) $x<y \ \rightarrow \ x=2$
   (2) $x<y \ \vee \ x \not< y$
   (3) $x \not< y \ \rightarrow \ x>2$

3. Demostrar: $y=1$
   (1) $2x+y=7 \ \rightarrow \ 2x=4$
   (2) $2x+y=5 \ \rightarrow \ y=1$
   (3) $2x+y=7 \ \vee \ 2x+y=5$
   (4) $2x \neq 4$

4. Demostrar: $y=1 \ \vee \ y=9$
   (1) $\neg(x=2 \ \vee \ x=8) \ \rightarrow \ x=6$
   (2) $2x+3y=21 \ \& \ x \neq 6$
   (3) $x=2 \ \rightarrow \ y=9$
   (4) $x=8 \ \rightarrow \ y=1$

5. Demostrar: $\neg(x \nless z) \lor \neg(z \neq 6)$
   (1) $x > 5 \lor y \nless 6$
   (2) $y \nless 6 \rightarrow x < z$
   (3) $x > 5 \rightarrow y < z$
   (4) $y \nless z \ \& \ z = 6$

6. Demostrar: $x \neq 4 \lor x > y$
   (1) $y = 0 \rightarrow xy = 0$
   (2) $y = 0 \lor y \nless 1$
   (3) $xy = 0 \lor xy > 3 \rightarrow x \neq 4$
   (4) $y \nless 1 \rightarrow xy > 3$

7. Demostrar: $y < 12 \lor x < 0$
   (1) $x < y \lor y < x$
   (2) $y < x \rightarrow x > 6$
   (3) $x < y \rightarrow x < 7$
   (4) $(x > 6 \lor x < 7) \rightarrow y \ngtr 11$
   (5) $y > 11 \lor x < 0$

8. Demostrar: $x^2 = 4 \lor x^2 = 9$
   (1) $2x^2 - 10x + 12 = 0 \ \& \ x < 4$
   (2) $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2 \lor x = 3$
   (3) $x = 2 \rightarrow x^2 = 4$
   (4) $x = 3 \rightarrow x^2 = 9$
   (5) $2x^2 - 10x + 12 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

9. Demostrar: $x + 1 \ngtr y \lor x \ngtr 4$
   (1) $(y = 5 \rightarrow x < y) \ \& \ x > 1$
   (2) $y > 5 \lor y = 5$
   (3) $x < y \lor y > 4 \rightarrow x + 1 \ngtr y \ \& \ y < 9$
   (4) $y > 5 \rightarrow y > 4$

10. Demostrar: $x = 4$
   (1) $x = 5 \lor x < y$
   (2) $x > 3 \lor z < 2 \rightarrow z < x \lor y = 1$
   (3) $x < y \rightarrow z < 2$
   (4) $x = 5 \rightarrow x > 3$
   (5) $z < x \rightarrow x = 4$
   (6) $y = 1 \rightarrow \neg(x > 3 \lor z < 2)$

Ley de simplificación disyuntiva. Si alguien dice «El equipo de los "Gigantes" ganará o el equipo de los "Gigantes" ganará», se puede concluir que opina simplemente que «El equipo de los "Gigantes" ganará». En forma simbólica el razonamiento es:

$$G \vee G$$

por tanto

$$G.$$

Este es un ejemplo de la ley de simplificación disyuntiva, cuya abreviatura es DP.

Algunos ejemplos de esta ley son:

a.	(1) $P \vee P$	P	*b.* (1) $\neg Q \vee \neg Q$	P
	(2) P	DP 1	(2) $\neg Q$	DP 1

c.	(1) $(P \& Q) \vee (P \& Q)$	P
	(2) $P \& Q$	DP 1

Obsérvese que las posibilidades de simplificar una disjunción son muchas menos que las de simplificar una conjunción. En el caso de una disjunción las dos proposiciones han de ser exactamente la misma.

Una aplicación importante de la ley de simplificación disyuntiva se presenta cuando un silogismo disyuntivo tiene la siguiente forma especial,

$$P \vee Q$$
$$P \rightarrow R$$
$$Q \rightarrow R$$

Por tanto,

$$R \vee R.$$

En este caso particular se puede simplificar la conclusión $R \vee R$ reduciéndola a R. Pues si $R \vee R$ es cierta, entonces R ha de ser cierta. La inferencia de $R \vee R$ *a* R es un ejemplo de la ley de simplificación disyuntiva.

Ejercicio 14

A. Utilizar las leyes del silogismo disyuntivo y simplificación disyuntiva para obtener una conclusión de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas simbolizadas.

1. (1) $S \vee \neg T$
   (2) $\neg T \rightarrow R$
   (3) $S \rightarrow R$
2. (1) $\neg Q \rightarrow \neg S$
   (2) $P \vee \neg Q$
   (3) $P \rightarrow \neg S$
3. (1) $S \rightarrow \neg R$
   (2) $T \rightarrow \neg R$
   (3) $S \vee T$
4. (1) $\neg R \rightarrow S$
   (2) $Q \vee \neg R$
   (3) $Q \rightarrow S$

B. Si se cree que el razonamiento siguiente «tiene sentido», ¿podría exponerse el motivo?

Si Juan es elegido, entonces José será nombrado presidente del comité.
Si Tomás es elegido, entonces José será nombrado presidente del comité.
O será elegido Juan o será elegido Tomás.
Por tanto, José será nombrado presidente del comité.

C. ¿Qué conclusiones se pueden sacar de los siguientes conjuntos de premisas utilizando las leyes del silogismo disyuntivo y simplificación disyuntiva?

1. O hay tres miembros del comité o hay cinco miembros.
   Si hay tres miembros, entonces no habrá empate de votos.
   Si hay cinco miembros, entonces no habrá empate de votos.
2. Si esta figura tiene tres lados, entonces es un triángulo.
   Si esta figura tiene tres ángulos, entonces es un triángulo.
   Esta figura cerrada o tiene tres lados o tiene tres ángulos.
3. O el equipo de los «Osos», o el equipo de los «Tigres» acabará primero.
   Si el equipo de los «Osos» acaba primero, entonces el equipo de los «Caballeros» será tercero.
   Si el equipo de los «Tigres» acaba primero el equipo de los «Caballeros» será tercero.

D. Dar una demostración formal de las siguientes conclusiones a partir de los conjuntos de premisas dados.

1. Demostrar: $\neg T$ & S
   (1) $P \rightarrow \neg Q$
   (2) $P \vee R$
   (3) $R \rightarrow \neg Q$
   (4) $T \rightarrow Q$
   (5) S
2. Demostrar: Q
   (1) $Q \vee S$
   (2) $S \rightarrow T$
   (3) $\neg T$
3. Demostrar: $\neg S$ & R
   (1) $S \rightarrow P$
   (2) $\neg P$ & $\neg T$
   (3) $\neg T \rightarrow R$

E. Simbolizar el razonamiento siguiente y después probar que la conclusión se puede deducir lógicamente de las premisas.

Juan o alcanza 65 puntos en el examen o alcanza 70 puntos.
Si Juan alcanza 65 puntos en el examen, entonces no obtiene la calificación de «Bien».
Si alcanza 70 puntos en el examen, no obtiene la calificación de «Bien».
Si Juan estudia, entonces obtiene la calificación de «Bien» en el examen.
Por tanto, Juan no estudia.

F. Dar una demostración formal de cada uno de los razonamientos siguientes:

1. Demostrar: $x<4$
   (1) $x=y \quad \vee \quad x>y$
   (2) $x<4 \quad \vee \quad x \nless z$
   (3) $x=y \quad \rightarrow \quad x<z$
   (4) $x>y \quad \rightarrow \quad x<z$

2. Demostrar: $x=1$
   (1) $2x+y=5 \quad \rightarrow \quad 2x=2$
   (2) $2x+y=5 \quad \vee \quad y=3$
   (3) $2x=2 \quad \rightarrow \quad x=1$
   (4) $y=3 \quad \rightarrow \quad 2x=2$

3. Demostrar: $x=2$
   (1) $x<3 \quad \vee \quad x>4$
   (2) $x<3 \quad \rightarrow \quad x\neq y$
   (3) $x>4 \quad \rightarrow \quad x\neq y$
   (4) $x<y \quad \vee \quad x\neq y$
   $\quad \rightarrow \quad x\neq 4 \quad \& \quad x=2$

4. Demostrar: $x^2=9$
   (1) $x=(+3) \quad \rightarrow \quad 2x^2=18$
   (2) $x=(+3) \quad \vee \quad x=(-3)$
   (3) $x=(-3) \quad \rightarrow \quad 2x^2=18$
   (4) $2x^2=18 \quad \rightarrow \quad x^2=9$

5. Demostrar: $\neg(x\neq 5)$
   (1) $z>x \quad \rightarrow \quad x\neq 7$
   (2) $x<6 \quad \vee \quad x=3$
   (3) $x=3 \quad \rightarrow \quad z>x$
   (4) $x<6 \quad \rightarrow \quad z>x$
   (5) $x=7 \quad \vee \quad x=5$

6. Demostrar: $y=z \quad \vee \quad x\neq 5$
   (1) $x=y \quad \rightarrow \quad x<z$
   (2) $x=5 \quad \rightarrow \quad x\nless z$
   (3) $x=3 \quad \rightarrow \quad x<z$
   (4) $x\nless y \quad \rightarrow \quad x=y$
   (5) $x=3 \quad \vee \quad x\nless y$

7. Demostrar: $x^2=9 \quad \vee \quad x^2>9$
   (1) $x=3 \quad \vee \quad x=4$
   (2) $x=3 \quad \rightarrow \quad x^2-7x+12=0$
   (3) $x=4 \quad \rightarrow \quad x^2-7x+12=0$
   (4) $x^2-7x+12=0 \quad \rightarrow \quad x>2$
   (5) $x^2<9 \quad \rightarrow \quad x\ngtr 2$
   (6) $x^2\nless 9 \quad \rightarrow \quad x^2=9 \quad \vee \quad x^2>9$

8. Demostrar: $\cos\theta=\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \vee \quad \csc\theta=2$
   (1) $\theta=150° \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2}$
   (2) $\theta=30° \quad \vee \quad \theta=150°$
   (3) $\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \csc\theta=2$
   (4) $\theta=30° \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2}$

Leyes conmutativas. Estas reglas, probablemente, parecerán muy triviales; sin embargo, se han de enunciar, pues no se puede dar ningún paso como conocido, si no se tiene una regla explícita que lo permita. El razonamiento que sigue es un ejemplo del uso de una de las leyes conmutativas.

Galileo murió en 1642 e Isaac Newton nació en 1642.
Por tanto, Isaac Newton nació en 1642 y Galileo murió en 1642.

En forma simbólica:

De P & Q
se deduce Q & P.

Es muy obvia, pues se sabe que el orden de las proposiciones atómicas en una conjunción no afecta al significado de la proposición molecular. Sin duda, todo el mundo afirmaría que siempre que P & Q es cierta, Q & P es también cierta. Recuérdese que esto es precisamente lo que se exige para una buena regla de inferencia: siempre que las premisas sean ciertas la conclusión ha de ser cierta.

Otro tipo de proposición molecular a la que se aplica la ley conmutativa es la siguiente:

O x es mayor que cinco o x es igual a cinco.

¿Es válida la conclusión siguiente?

O x es igual a cinco o x es mayor que cinco.

La respuesta es «sí», puesto que efectivamente es cierta si la premisa lo es. Para ilustrar la forma de la ley conmutativa simbolizamos este razonamiento. Sea

P = «x es mayor que cinco»
Q = «x es igual a cinco».

El razonamiento es:

De P $\vee$ Q
se deduce Q $\vee$ P.

La ley conmutativa se aplica a conjunciones y disjunciones; es decir, el cambio del orden de los dos miembros de las conjunciones o de las disjunciones no altera su significado. La ley conmutativa no se aplica a las condicionales. A continuación se dan otros ejemplos:

a.	(1)	$P \,\&\, \neg Q$	P
	(2)	$\neg Q \,\&\, P$	CL 1
b.	(1)	$\neg P \,\&\, Q$	P
	(2)	$Q \,\&\, \neg P$	CL 1
c.	(1)	$\neg P \vee \neg Q$	P
	(2)	$\neg Q \vee \neg P$	CL 1

La abreviatura de esta regla es CL.

Ejercicio 15

A. Aplicar la ley conmutativa a las proposiciones siguientes para obtener una proposición diferente.

1. La adición es una operación binaria y la multiplicación es una operación binaria.
2. O una fuerza actúa sobre un cuerpo o la velocidad del cuerpo no varía.
3. O el tío de Juan es un senador o es un representante en la Legislatura del Estado.
4. Antonio vive en la calle del Mercado y Juan en la calle del Sol.
5. O el hidrógeno es un líquido o es un gas.

B. ¿Qué conclusión se puede sacar de las siguientes premisas utilizando la ley conmutativa?

1.	(1)	$\neg P \vee Q$	P
2.	(1)	$\neg R \,\&\, \neg S$	P
3.	(1)	$P \,\&\, S$	P
4.	(1)	$\neg T \vee \neg S$	P
5.	(1)	$Q \vee R$	P

C. Demostrar que las conclusiones siguientes son válidas dando una deducción formal completa.

1. Demostrar: $S \ \& \ Q$
   (1) $P \vee T$
   (2) $\neg T$
   (3) $P \rightarrow Q \ \& \ S$

2. Demostrar: $\neg(R \ \& \ \neg T)$
   (1) $(R \ \& \ \neg T) \rightarrow \neg S$
   (2) $P \rightarrow S$
   (3) $P \ \& \ Q$

3. Demostrar: $S \ \& \ R$
   (1) $(R \ \& \ S) \vee P$
   (2) $Q \rightarrow \neg P$
   (3) $T \rightarrow \neg P$
   (4) $Q \vee T$

4. Demostrar: $R \vee Q$
   (1) $S \rightarrow R$
   (2) $S \vee T$
   (3) $\neg T$

5. Demostrar: T
   (1) $P \rightarrow Q$
   (2) $Q \rightarrow R$
   (3) $(P \rightarrow R) \rightarrow \neg S$
   (4) $S \vee T$

6. Demostrar: $\neg S$
   (1) $\neg T \vee \neg S$
   (2) $\neg Q \rightarrow T$
   (3) $Q \rightarrow \neg R$
   (4) R

7. Demostrar: R
   (1) $S \rightarrow R \vee T$
   (2) $\neg\neg S$
   (3) $\neg T$

8. Demostrar: $\neg Q \ \& \ P$
   (1) $T \rightarrow P \ \& \ \neg Q$
   (2) $T \vee \neg R$
   (3) R

9. Demostrar: T
   (1) $P \vee \neg R$
   (2) $\neg S$
   (3) $P \rightarrow S$
   (4) $\neg R \rightarrow T$

10. Demostrar: $\neg P$
   (1) $R \rightarrow T$
   (2) $S \rightarrow Q$
   (3) $T \vee Q \rightarrow \neg P$
   (4) $R \vee S$

11. Demostrar: $y \not< 4 \quad \& \quad x<y$
   (1) $x>y \quad \vee \quad x<4$
   (2) $x<4 \quad \rightarrow \quad x<y \quad \& \quad y \not< 4$
   (3) $x>y \quad \rightarrow \quad x=4$
   (4) $x \neq 4$

12. Demostrar: $y>3 \quad \& \quad y<5$
   (1) $x=3 \quad \vee \quad y=3$
   (2) $x>2 \quad \vee \quad x+y \not> 5$
   (3) $y=3 \quad \vee \quad x=3 \quad \rightarrow \quad x+y>5$
   (4) $\neg(y<5 \quad \& \quad y>3) \quad \rightarrow \quad x \not> 2$

13. Demostrar: $x<3 \quad \& \quad y=7$
    (1) $x<3 \quad \& \quad y>6$
    (2) $y \neq 7 \quad \rightarrow \quad \neg(x=2 \quad \& \quad y>x)$
    (3) $y>6 \quad \& \quad x<3 \quad \rightarrow \quad y>x \quad \& \quad x=2$

14. Demostrar: $x=1 \quad \& \quad (y<1 \quad \vee \quad y<2)$
    (1) $x+2y=5 \quad \vee \quad 3x+4y=11$
    (2) $x \not< 2 \quad \vee \quad x>y \quad \rightarrow \quad y<2 \quad \vee \quad y<1$
    (3) $3x+4y=11 \quad \rightarrow \quad x=1$
    (4) $x>y \quad \vee \quad x \not< 2$
    (5) $x+2y=5 \quad \rightarrow \quad x=1$

15. Demostrar: $x<6$
    (1) $x>y \quad \vee \quad x<6$
    (2) $x>y \quad \rightarrow \quad x>4$
    (3) $x>4 \quad \rightarrow \quad x=5 \quad \& \quad x<7$
    (4) $x<6 \quad \rightarrow \quad x=5 \quad \& \quad x<7$
    (5) $x<7 \quad \& \quad x=5 \quad \rightarrow \quad z>x \quad \vee \quad y<z$
    (6) $x>y \quad \rightarrow \quad \neg(y<z \quad \vee \quad z>x)$

Las leyes de Morgan. En el lenguaje corriente ocurre a veces que hay proposiciones enunciadas de manera distinta que tienen el mismo significado. Por ejemplo

(1) No llueve y no hace sol,

se puede también expresar, en forma algo forzada, diciendo:

(2) No ocurre que llueva o que haga sol.

Si (1) y (2) significan lo mismo en el lenguaje corriente, entonces en Lógica será válido concluir (1) de (2) o (2) de (1), lo que expresado en símbolos es:

(a) de $\neg P \,\&\, \neg Q$ se puede concluir $\neg(P \vee Q)$.

y

(b) de $\neg(P \vee Q)$ se puede concluir $\neg P \,\&\, \neg Q$.

Así *(b)* dice que si no se tiene o P o Q, entonces no se tiene P y no se tiene Q. La regla que permite esta conclusión es una de las denominadas *leyes de Morgan.*

Las premisas de *(a)* y *(b)* son dos de las formas proposicionales moleculares a las que se les puede aplicar las leyes de Morgan. Estas leyes también se aplican a otras formas proposicionales, como se puede ver al considerar las dos proposiciones equivalentes:

(3) O no hace calor o no nieva $\neg(P \wedge$

y

(4) No hace a la vez calor y nieva,

y en forma más lógica, $\neg P \vee \neg Q$

(4') No ocurre a la vez que hace calor y que nieva.

Puesto que (3) y (4) tienen el mismo significado, una puede deducirse de la otra. Por tanto, en símbolos lógicos se puede escribir:

(c) de $\neg P \vee \neg Q$ se puede concluir $\neg(P \ \& \ Q)$,
(d) de $\neg(P \ \& \ Q)$ se puede concluir $\neg P \vee \neg Q$.

(c) y *(d)* son, pues, otros dos ejemplos de la aplicación de las leyes de Morgan. Otro caso es:

(e) de $P \ \& \ Q$ se puede concluir $\neg(\neg P \vee \neg Q)$.

y finalmente:

(f) de $\neg(P \vee \neg Q)$ se puede concluir $\neg P \ \& \ \neg\neg Q$.

Con frecuencia hay más de una forma posible para la conclusión. Afortunadamente, estudiando las diferentes formas proposicionales a las que se aplican las leyes de Morgan se obtiene un modelo que se puede seguir siempre. Será posible entonces enunciar las leyes de Morgan como una regla que se aplicará a cada una de las formas de premisas en las que puede utilizarse, y en todo caso se obtiene la forma de la conclusión deseada. Para hallar este modelo examinaremos cuidadosamente las seis formas proposicionales dadas.

a. $\dfrac{\neg P \ \& \ \neg Q}{\neg(P \vee Q)}$ *d.* $\dfrac{\neg(P \ \& \ Q)}{\neg P \vee \neg Q}$

b. $\dfrac{\neg(P \vee Q)}{\neg P \ \& \ \neg Q}$ *e.* $\dfrac{P \ \& \ Q}{\neg(\neg P \vee \neg Q)}$

c. $\dfrac{\neg P \vee \neg Q}{\neg(P \ \& \ Q)}$ *f.* $\dfrac{\neg(P \vee \neg Q)}{\neg P \ \& \ Q}$

Primero, obsérvese que la premisa es siempre de una de las tres formas siguientes: (1) una conjunción como en *(a)* y *(e)*; (2) una disjunción como en *(c)*; o (3) una negación como en *(b)*, *(d)* y *(f)*. Si es una negación, ha de ser la negación de una conjunción como en *(d)* o la negación de una disjunción como en *(b)* y *(f)*. La premisa no es nunca una condicional, ni la negación de una condicional, ni la negación de una negación.

Segundo, obsérvese que si la premisa es una negación, la conclusión no es una negación como en *(b)*, *(d)* y *(f)*. Y si la premisa no es una negación, entonces la conclusión es una negación como en *(a)*, *(c)* y *(e)*. Una fórmula completa se niega, o bien añadiendo un símbolo de negación delante de la fórmula, o bien quitando el símbolo de negación delante de la fórmula.

Tercero, obsérvese que & se cambia siempre en $\vee$ y $\vee$ en &.

Cuarto, obsérvese que cada miembro de una conjunción o disjunción siempre gana o pierde un símbolo de negación. Así, al aplicar las leyes de Morgan cada miembro se niega.

Resumiendo, lo que se ha de hacer para aplicar las leyes de Morgan, cuya abreviatura es DL, *como una regla de operación,* es verificar los siguientes pasos:

1. Cambiar & en $\vee$ o $\vee$ en &;
2. Negar cada miembro de la disjunción o conjunción;
3. Negar la fórmula completa.

En el ejemplo que sigue estos tres pasos se dan cada vez que se han aplicado las leyes de Morgan; pero haciendo diferentes elecciones de la manera de hacer cada una de las tres negaciones, se han obtenido conclusiones en distinta forma. Obsérvese que se puede elegir la manera de negar $\neg(\neg P \,\&\, Q)$ o de negar $\neg P$, pero no hay elección en la manera de negar Q.

(1)	$\neg(\neg P \,\&\, Q)$	P
(2)	$P \vee \neg Q$	DL 1
(3)	$\neg\neg P \vee \neg Q$	DL 1
(4)	$\neg\neg(P \vee \neg Q)$	DL 1
(5)	$\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg Q)$	DL 1

Algunos otros ejemplos de la aplicación de las leyes de Morgan son

a. $\dfrac{\neg(P \,\&\, \neg Q)}{\neg P \vee \neg\neg Q}$ *c.* $\dfrac{\neg\neg P \vee \neg Q}{\neg(\neg P \,\&\, Q)}$

b. $\dfrac{\neg(\neg P \,\&\, \neg Q)}{\neg\neg P \vee \neg\neg Q}$ *d.* $\dfrac{\neg(P \vee \neg Q)}{\neg P \,\&\, \neg\neg Q}$

e. $\dfrac{\neg\neg P \,\&\, \neg Q}{\neg(\neg P \vee Q)}$

Ejercicio 16

A. ¿Qué se puede concluir de las premisas siguientes utilizando las leyes de Morgan?

1. O los arácnidos no son insectos o no tienen ocho patas.
2. No ocurre que o el aire es un buen conductor del calor o el agua es un buen conductor del calor.
3. No ocurre que un número es a la vez mayor que cero y que es negativo.
4. El río Mississipi no corre en dirección Norte y el río Nilo no corre en dirección Sur.
5. No ocurre que los murciélagos son pájaros o que las focas son peces.

B. Traducir las premisas y conclusiones de la Sección **A** anterior en símbolos lógicos y demostrar que su conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

C. Aplicar las leyes de Morgan a las siguientes proposiciones para deducir conclusiones.

1. $\neg(P \ \& \ Q)$
2. $\neg R \vee \neg T$
3. $\neg(\neg R \ \& \ S)$
4. $\neg G \vee \neg H$
5. $\neg\neg S \vee \neg T$
6. $\neg P \ \& \ \neg Q$
7. $\neg\neg P \ \& \ \neg Q$
8. $\neg(C \vee D)$
9. $\neg(\neg P \ \& \ \neg Q)$
10. $\neg S \vee \neg\neg T$
11. $R \ \& \ S$
12. $\neg(\neg A \ \& \ \neg B)$

D. Indicar una demostración formal completa para cada uno de los razonamientos simbolizados siguientes.

1. Demostrar: $\neg S$
   (1) $\neg(P \ \& \ Q)$
   (2) $\neg Q \rightarrow T$
   (3) $\neg P \rightarrow T$
   (4) $S \rightarrow \neg T$

2. Demostrar: $\neg(A \vee B)$
   (1) $C \ \& \ \neg D$
   (2) $C \rightarrow \neg A$
   (3) $D \vee \neg B$

3. Demostrar: $R \ \& \ Q$
   (1) $\neg S \rightarrow \neg(P \vee$ -
   (2) $T \rightarrow Q \ \& \ R$
   (3) $\neg S$

Demostrar: $\neg R$
   (1) $P \rightarrow \neg Q$
   (2) $\neg Q \rightarrow \neg S$
   (3) $(P \rightarrow \neg S) \rightarrow \neg T$
   (4) $R \rightarrow T$

5. Demostrar: D
   (1) $\neg A \rightarrow B$
   (2) $C \rightarrow B$
   (3) $C \vee \neg A$
   (4) $\neg B \vee D$

6. Demostrar: $\neg T$
   (1) $T \rightarrow P \ \& \ S$
   (2) $Q \rightarrow \neg P$
   (3) $R \rightarrow \neg S$
   (4) $R \vee Q$

7. Demostrar: $\neg P$
   (1) $R \rightarrow \neg P$
   (2) $(R \ \& \ S) \vee T$
   (3) $T \rightarrow (Q \vee U)$
   (4) $\neg Q \ \& \ \neg U$

8. Demostrar: $R \ \& \ Q$
   (1) $P \vee Q$
   (2) $S \rightarrow Q \ \& \ R$
   (3) $P \rightarrow S$
   (4) $Q \rightarrow S$

9. Demostrar: $G \vee \neg H$
   (1) $E \vee F \rightarrow \neg H$
   (2) $J \rightarrow E$
   (3) $K \rightarrow F$
   (4) $J \vee K$

10. Demostrar: $S \ \& \ T$
   (1) $\neg(P \vee \neg R)$
   (2) $Q \vee P$
   (3) $R \rightarrow S$
   (4) $(Q \ \& \ S) \rightarrow (T \ \& \ S)$

E. Dar una demostración formal completa para cada uno de los razonamientos siguientes.

1. Demostrar: $\neg(x=3 \ \ \& \ \ x<2)$
   (1) $\neg(x<2 \ \ \& \ \ x=3)$

2. Demostrar: $\neg(x=5 \ \ \& \ \ y=4)$
   (1) $y \neq 3$
   (2) $x+y=8 \ \rightarrow \ y=3$
   (3) $x+y=8 \ \vee \ x \neq 5$

3. Demostrar: $y=2 \ \ \& \ \ x>y$
   (1) $\neg(y>5 \ \ \& \ \ x \neq 6)$
   (2) $x=6 \ \rightarrow \ x>y$
   (3) $y \ngtr 5 \ \rightarrow \ x>y$

4. Demostrar: $x>y$
   (1) $x \nless y$
   (2) $x<y \ \vee \ \neg(x \ngtr 3 \ \vee \ x+y<5)$
   (3) $x>3 \ \rightarrow \ \neg(x \ngtr y \ \vee \ y \neq 2)$

5. Demostrar: $\neg(x=2 \lor y<5)$
   (1) $\neg(y-x=2 \lor x+y \not> 8)$
   (2) $\neg(x>y \lor y<5)$
   (3) $x=2 \to x+y \not> 8$
6. Demostrar: $x<y \lor y \neq 4$
   (1) $x=1 \to x<y$
   (2) $x^2-4x+3=0 \to x=1 \lor x=3$
   (3) $\neg(x=y \lor x^2-4x+3 \neq 0)$
   (4) $x=3 \to x<y$
7. Demostrar: $2+3 \neq 3\times 3 \lor 2\times 3 \neq 1\times 4$
   (1) $2\times 3=1\times 4 \;\&\; 2+3=3\times 3 \to 2+3=6$
   (2) $2+3 \neq 6 \lor 2\times 3=5$
   (3) $2\times 3 \neq 5$
8. Demostrar: $x-y \neq 2$
   (1) $\neg(x>y \;\&\; x+y>7)$
   (2) $x \not> y \to x<4$
   (3) $x+y \not> 7 \to x<4$
   (4) $x-y=2 \to x \not< 4$
9. Demostrar: $x=1$
   (1) $\neg(z<3 \lor x>y) \;\&\; y=2$
   (2) $x \not< y \lor x=1$
   (3) $x>z \to x>y$
   (4) $x \not> z \to x<y$
10. Demostrar: $\neg(x=y \lor y \not> 1)$
   (1) $y \neq 1 \;\&\; y \not< 1$
   (2) $y \not> 1 \to y<1 \lor y=1$
   (3) $x=3 \lor x>3$
   (4) $x>3 \to x \neq y$
   (5) $x=3 \to x \neq y$

• 2.6 *Proposiciones bicondicionales*

Hasta aquí se han analizado proposiciones moleculares utilizando sólo cuatro términos de enlace de proposiciones. Hay otro término de enlace de proposiciones que se utilizará más tarde. Este término de enlace es «si y sólo si». Las proposiciones que utilizan este término de enlace se denominan *proposiciones bicondicionales*. El símbolo que se utilizará para este término de enlace es:

$$\leftrightarrow.$$

Este símbolo es muy significativo para la proposición bicondicional. El signo aparece como dos signos condicionales que van en sentido opuesto. Efectivamente, una proposición bicondicional se parece extraordinariamente a dos proposiciones condicionales. Para ilustrar esto se considera un ejemplo en el lenguaje habitual:

Estos campos se inundan si y sólo si el agua alcanza esta altura.

En forma simbólica la proposición sería:

$$P \leftrightarrow Q,$$

donde P es el símbolo de la primera proposición y Q es el símbolo de la última proposición. Se puede leer esta proposición: P si y sólo si Q.

La proposición bicondicional $P \leftrightarrow Q$ tiene la misma fuerza que dos proposiciones condicionales; primera $P \rightarrow Q$ y segunda, $Q \rightarrow P$. La proposición en castellano significa que si el agua alcanza cierta altura, entonces el campo se inunda. También significa que si el campo se inunda, entonces el agua alcanza cierta altura.

Así se tiene una nueva regla que nos permite deducir ambas $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$ de $P \leftrightarrow Q$. Esta ley se denominará la *ley de las proposiciones bicondicionales,* LB. En símbolos permite los siguientes razonamientos.

a.	$P \leftrightarrow Q$	P	*c.*	$P \leftrightarrow Q$	P
	$P \rightarrow Q$	LB		$(P \rightarrow Q)\ \&\ (Q \rightarrow P)$	LB
b.	$P \leftrightarrow Q$	P	*d.*	$P \rightarrow Q$	P
	$Q \rightarrow P$	LB		$Q \rightarrow P$	P
				$P \leftrightarrow Q$	LB

Se adoptará la regla de que la bicondicional «si y sólo si» es más potente que cada uno de los otros términos de enlace. Así, sin paréntesis, se sabe que:

$$P \rightarrow Q \leftrightarrow S\ \&\ P$$

es una bicondicional y nunca una condicional o conjunción. Para convertirla en condicional, son necesarios paréntesis, como se indica en

$$P \rightarrow (Q \leftrightarrow S\ \&\ P).$$

El consecuente de esta condicional es una bicondicional. Si se quiere que el consecuente sea una conjunción, hacen falta paréntesis adicionales como en

$$P \rightarrow ((Q \leftrightarrow S)\ \&\ P).$$

Puesto que $\leftrightarrow$ domina los otros términos de enlace, mientras los paréntesis no indiquen lo contrario, las fórmulas siguientes son también bicondicionales:

a. $\neg P \leftrightarrow \neg Q$ *b.* $P \ \& \ Q \leftrightarrow S$ *c.* $S \vee T \leftrightarrow \neg P$
$R \ \& \ S \leftrightarrow P \ \& \ Q$ $P \vee Q \leftrightarrow R \vee S$ $\neg T \leftrightarrow S$

EJERCICIO 17

A. Nombrar cada uno de los términos de enlace que se encuentran en las proposiciones siguientes:

1. Este metal se funde si y sólo si se somete a un calor muy intenso.
2. Patinaremos si y sólo si el hielo no es demasiado delgado.
3. Tomás irá andando si y sólo si ha perdido el coche.
4. El sonido se propaga si y sólo si hay un medio transmisor.
5. Esta figura tiene cuatro ángulos interiores si y sólo si tiene cuatro lados.

B. Simbolizar completamente las proposiciones de la Sección **A** anterior, indicando las proposiciones atómicas que son simbolizadas por cada símbolo literal.

C. Simbolizar completamente las premisas y conclusiones de cada uno de los razonamientos siguientes y dar una deducción formal:

1. Esta ley será aprobada en esta sesión si y sólo si es apoyada por la mayoría. O es apoyada por la mayoría o el gobernador se opone a ella. Si el gobernador se opone a ella, entonces será pospuesta en las deliberaciones del comité. Por tanto, o esta ley será aprobada en esta sesión o será pospuesta en las deliberaciones del comité.
2. El Sol sale y se pone si y sólo si la Tierra gira. La Tierra gira y la Luna se mueve alrededor de la Tierra. Por tanto, el Sol sale y se pone o el clima es muy caliente o frío.
3. $3 \times 5 = 12 \ \leftrightarrow \ 5+5+5=12$
   $4 \times 4 \neq 13$
   $5+5+5=12 \ \rightarrow \ 4 \times 4 = 13$
   Por tanto. $3 \times 5 \neq 12$
4. El terreno puede ser cultivado si y sólo si se provee de un sistema de riego. Si el terreno puede ser cultivado, entonces triplicará su valor actual.

Por tanto, si se provee de un sistema de riego, entonces el terreno triplicará su valor actual.

5. Un líquido es un ácido si y sólo si colorea de azul el papel de tornasol rojo. Un líquido colorea de azul el papel de tornasol rojo si y sólo si contiene iones de hidrógeno libres.
   Por tanto, un líquido es un ácido si y sólo si contiene iones de hidrógeno libres.
6. Si no ocurre que si un objeto flota en el agua entonces es menos denso que el agua, entonces se puede caminar sobre el agua. Pero no se puede caminar sobre el agua.
   Si un objeto es menos denso que el agua, entonces puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso.
   Si puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso, entonces el objeto flotará en el agua.
   Por tanto, un objeto flotará en el agua si y sólo si es menos denso que el agua.

D. Dar una demostración formal completa de cada uno de los razonamientos siguientes.

1. Demostrar: $2\times 5=5+5 \;\rightarrow\; 2\times 4=4+4$
   (1) $2\times 4=4+4 \;\leftrightarrow\; 2\times 5=5+5$

2. Demostrar: $x=4 \;\leftrightarrow\; 3x+2=14$
   (1) $3x+2=14 \;\leftrightarrow\; 3x=12$
   (2) $3x=12 \;\leftrightarrow\; x=4$

3. Demostrar: $x+y=5$
   (1) $3x+y=11 \;\leftrightarrow\; 3x=9$
   (2) $3x=9 \;\rightarrow\; 3x+y=11 \;\leftrightarrow\; y=2$
   (3) $y\neq 2 \;\vee\; x+y=5$

4. Demostrar: $\neg(2x\neq 8 \;\&\; x\neq 3)$
   (1) $2x=6 \;\leftrightarrow\; x=3$
   (2) $2x=8 \;\leftrightarrow\; x=4$
   (3) $2x=6 \;\vee\; x=4$

5. Demostrar: $\neg(y=2 \;\&\; x+2y\neq 7)$
   (1) $5x=15 \;\leftrightarrow\; x=3$
   (2) $5x=15 \;\&\; 4x=12$
   (3) $x=3 \;\rightarrow\; x+2y=7$

6. Demostrar: $x \nless y \quad \& \quad x \neq y$
   (1) $y \ngtr x \quad \leftrightarrow \quad x=y \quad \vee \quad x<y$
   (2) $\neg(y<1 \quad \vee \quad y \ngtr x)$
7. Demostrar: $x<y \quad \leftrightarrow \quad y>x$
   (1) $y>x \quad \leftrightarrow \quad x<y$

8. Demostrar: $x<y \quad \& \quad y=6$
   (1) $x<y \quad \leftrightarrow \quad y>4$
   (2) $y=6 \quad \leftrightarrow \quad x+y=10$
   (3) $y>4 \quad \& \quad \neg(x+y \neq 10)$

9. Demostrar: $xy \neq 0$
   (1) $y>x \quad \leftrightarrow \quad x=0$
   (2) $xy=0 \quad \leftrightarrow \quad x=0$
   (3) $y \ngtr x$

10. Demostrar: $\neg(x<y \quad \& \quad x=1)$
    (1) $x=y \quad \rightarrow \quad x \nless y$
    (2) $y=0 \quad \leftrightarrow \quad x \nless y$
    (3) $x=0 \quad \vee \quad xy=0 \quad \rightarrow \quad y=0$
    (4) $(x=y \quad \rightarrow \quad y=0) \quad \rightarrow \quad x=0$

● 2.7 *Resumen de reglas de inferencia*

Se ha visto que uno de los objetivos importantes de la Lógica es la inferencia o deducción de conclusiones de conjuntos de premisas. Para hacer deducciones son necesarias ciertas reglas de inferencia. Estas reglas operan igual que las reglas de cualquier juego. Permiten hacer ciertos movimientos. Cada movimiento permitido por las reglas es un paso en inferencia; una proposición se puede deducir si se han dado otras proposiciones. Hasta aquí, en nuestro estudio de la Lógica, se han aprendido catorce reglas de inferencia, las suficientes para poder hacer deducciones largas y bastante complicadas. En las demostraciones formales o deducciones se justifica cada paso de inferencia haciendo referencia a la regla particular de inferencia que permite aquel paso. Se indica esta regla poniendo la abreviatura de su nombre a la derecha del paso de inferencia. Es también necesario indicar los números de las líneas en la inferencia de las que se ha deducido cada paso.

Las reglas de Lógica no son, evidentemente, reglas elegidas al azar. Son de tal forma que sólo permiten hacer inferencias válidas. Una inferencia válida es la que es consecuencia lógica de las premisas. Esto significa que si las premisas son ciertas, la conclusión que se sigue ha de ser también cierta. La peculiaridad de las reglas de inferencia es el asegurar que si se ha dado un conjunto de proposiciones verdaderas las conclusiones que se pueden deducir de estas proposiciones serán también verdaderas.

Para proseguir en el estudio de la Lógica es esencial estar muy familiarizado no sólo con la idea misma de inferencia válida, sino también con cada regla particular de inferencia que permite realizar un paso lógico. Si no se conocen bien estas reglas lógicas no se es capaz de planear una estrategia que ayudará a alcanzar la conclusión deseada.

Al final de esta sección se da una tabla con el nombre de cada regla y la forma de la misma. Se puede utilizar como tabla de referencia. Recuérdese que la forma de la inferencia es la misma tanto si las partes de la proposición molecular son proposiciones atómicas simplemente o son a su vez proposiciones moleculares.

En la tabla se ha evitado recargarla dándole forma de una demostración formal y se ha empleado simplemente una línea horizontal. Debajo de la línea se ha escrito la proposición que resulta de aplicar la regla a la proposición o proposiciones anteriores a la línea. En una demostración, las proposiciones anteriores a la línea pueden ser premisas u otras líneas deducidas anteriormente.

Tabla de re de inferencia

Modus ponendo ponens (PP)

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

Modus tollendo tollens (TT)

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ \neg Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

Modus tollendo ponens (TP)

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg P \\ \hline Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg Q \\ \hline P \end{array}$$

Doble negación (DN)

$$\begin{array}{l} P \\ \hline \neg\neg P \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg\neg P \\ \hline P \end{array}$$

Regla de simplificación (S)

$$\begin{array}{l} P \,\&\, Q \\ \hline P \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \,\&\, Q \\ Q \end{array}$$

Regla de adjunción (A)

$$\begin{array}{l} P \\ Q \\ P \,\&\, Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \\ Q \\ Q \,\&\, P \end{array}$$

Ley del silogismo hipotético (HS)

$$\frac{\begin{array}{l}P \rightarrow Q\\ Q \rightarrow R\end{array}}{P \rightarrow R}$$

Ley de adición (LA)

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \frac{Q}{P \vee Q}$$

Leyes de Morgan (DL)

1. Cambiar & por ∨ o ∨ por &
2. Negar cada miembro de la conjunción o disjunción.
3. Negar la fórmula completa.

Ley de la simplificación disyuntiva (DP)

$$\frac{P \vee P}{P}$$

Ley del silogismo disyuntivo (DS)

$$\frac{\begin{array}{l}P \vee Q\\ P \rightarrow R\\ Q \rightarrow S\end{array}}{R \vee S} \quad \text{o} \quad \frac{\begin{array}{l}P \vee Q\\ P \rightarrow R\\ Q \rightarrow S\end{array}}{S \vee R}$$

Leyes conmutativas

$$\frac{P \,\&\, Q}{Q \,\&\, P} \qquad \frac{P \vee Q}{Q \vee P}$$

Ley de las proposiciones bicondicionales (LB)

$$\frac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q} \qquad \frac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P}$$

$$\frac{\begin{array}{l}P \rightarrow Q\\ Q \rightarrow P\end{array}}{P \leftrightarrow Q} \qquad \frac{P \leftrightarrow Q}{(P \rightarrow Q) \,\&\, (Q \rightarrow P)}$$

Regla de premisas (P)

Una premisa se puede introducir en cualquier punto de la deducción.

CAPITULO 3

CERTEZA Y VALIDEZ

3.1 *Introducción*

En nuestro estudio de Lógica, nos hemos ocupado de probar la validez de conclusiones dadas ciertas premisas. Hemos aprendido que si las premisas son afirmaciones ciertas, entonces las conclusiones que se siguen lógicamente de ellas han de ser ciertas. Se pueden encontrar algunos razonamientos referentes a proposiciones en lenguaje corriente en los que sabemos que las premisas son afirmaciones ciertas y que las conclusiones son también ciertas. ¿Indica esto que la forma de inferencia que va de dichas premisas a la conclusión es lógicamente válida? La respuesta es, *no*. Pueden presentarse otros casos de razonamientos del mismo tipo en los que las premisas sean ciertas, pero la conclusión sea falsa. Un caso aislado en el que premisas ciertas conduzcan a conclusiones ciertas no es suficiente para demostrar que una inferencia dada es válida.

Se puede decir que un razonamiento es válido sólo cuando se puede sostener la afirmación indicando cada una de las reglas de inferencia empleadas para cada proposición deducida. En el Capítulo 2 se dieron algunas reglas de inferencia que permiten sostener esta afirmación de validez. Se presenta la cuestión: ¿Es posible que existan inferencias proposicionales válidas sin que las reglas dadas sean suficientes para apoyarlas?

Supóngase que alguien sugiere como regla de inferencia que si se tiene la proposición $P \rightarrow Q$, entonces se puede deducir la proposición $\neg P \vee Q$. De otra forma,que si $P \rightarrow Q$ es una proposición cierta, entonces la proposición $\neg P \vee Q$ ha de ser siempre cierta. La inferencia es, en efecto, válida. Pero si se considera la lista de reglas de inferencia estudiadas hasta ahora, no se encuentra ninguna que permita pasar directamente de esta premisa a la conclusión.

Hay muchos casos de estos, de inferencias válidas, para las que no se ha introducido ninguna regla específica. Puesto que cada inferencia que se sugiere es o no válida, desearíamos poder demostrar la validez o la no validez de la misma, sin duda alguna. Si se puede llegar a la conclusión utilizando nuestras reglas, entonces es válida. Si se puede encontrar un caso del tipo de la inferencia sugerida en el que las premisas son ciertas y la conclusión es falsa, entonces se sabe que es un razonamiento no válido porque premisas válidas conducen únicamente a conclusiones válidas.

Pero supongamos que después de muchas tentativas no se ha podido encontrar una demostración. *Esto* no demuestra que no sea válido el razonamiento. Y si suponemos que después de mucho tiempo no se ha podido hallar ningún ejemplo que demuestre que el razonamiento no es válido, *esto* tampoco demuestra que es válido. Lo que se necesita en estos casos es un método general para demostrar la validez o la no validez. El propósito de este capítulo y del siguiente es introducir un método que será adecuado para tratar cada ejemplo posible de inferencia proposicional.

● 3.2 *Valores de certeza y términos de enlace de certeza funcional*

Se empezará con la idea de que cada proposición ha de tener un *valor de certeza;* cada proposición ha de ser cierta o falsa. El valor de certeza de una proposición cierta es *cierto,* y el valor de certeza de una proposición falsa es *falso.* Cada proposición atómica o molecular tiene uno de estos dos valores de certeza posibles.

Si se conocen los valores de certeza de las proposiciones atómicas dentro de proposiciones moleculares, entonces es posible dar los valores de certeza de las proposiciones moleculares; pues los cinco términos de enlace que se han empleado para formar proposiciones moleculares son términos de enlace de *certeza funcional.* En consecuencia la certeza o falsedad de una proposición molecular depende completamente de la certeza o falsedad de las proposiciones atómicas que la componen. Para determinar la certeza o falsedad de cada proposición molecular sólo es necesario conocer la certeza o falsedad de sus proposiciones atómicas y los términos de enlace que las ligan. Se estudiará por separado cada término de enlace de proposiciones y se verá cuál es su comportamiento.

Conjunción. «y» es un término de enlace de certeza funcional, de manera que se puede decidir el valor de certeza de la proposición $P \;\&\; Q$ si se conocen los valores de certeza de la proposición P y de la proposición Q. La conjunción de dos proposiciones es cierta si y sólo si ambas proposiciones son ciertas. Por tanto, si $P \;\&\; Q$ ha de ser una proposición cierta, entonces P ha de ser cierta y Q ha de ser cierta. No importa aquí cuáles sean las dos proposiciones que se han unido por medio del término de enlace «y». En Lógica se pueden ligar dos proposiciones cualesquiera para formar una conjunción. No se requiere que el contenido de una de ellas tenga relación con el contenido de la otra.

Hay cuatro combinaciones posibles de valores de certeza para proposiciones de la forma P y Q. Recordando que la certeza de la conjunción

P & **Q** depende de los valores de certeza de aquéllas, se trata de hallar las combinaciones para las que la conjunción **P** & **Q** será una proposición cierta.

Las cuatro combinaciones posibles son:

P es cierta y **Q** es cierta.
P es cierta y **Q** es falsa.
P es falsa y **Q** es cierta.
P es falsa y **Q** es falsa.

La regla práctica para conjunciones es: *La conjunción de dos proposiciones es cierta si y sólo si ambas proposiciones son ciertas.* Así se concluye:

Si **P** es cierta y **Q** es cierta, entonces **P** & **Q** es cierta.
Si **P** es cierta y **Q** es falsa, entonces **P** & **Q** es falsa.
Si **P** es falsa y **Q** es cierta, entonces **P** & **Q** es falsa.
Si **P** es falsa y **Q** es falsa, entonces **P** & **Q** es falsa.

Ejercicio 1

A. Juan dice, «Mi cumpleaños es en agosto y el cumpleaños de Ana es al mes siguiente». Nos enteramos que el cumpleaños de Juan es en agosto pero que se ha equivocado respecto al cumpleaños de Ana, pues es en noviembre. La proposición de Juan, ¿es cierta o falsa? ¿Puede explicar la respuesta de acuerdo con la regla del uso de la conjunción?

B. Decir si **P** & **Q** es cierta (C) o falsa (F) en cada uno de los casos siguientes:

1. Si **P** es una proposición cierta y **Q** es una proposición cierta.
2. Si **P** es una proposición cierta pero **Q** es una proposición falsa.
3. Si ambas **P** y **Q** son proposiciones falsas.
4. Si ni **P** ni **Q** son proposiciones falsas.
5. Si **P** es una proposición falsa pero **Q** es una proposición cierta.

Negación. El término de enlace «no» es de certeza funcional porque la certeza o falsedad de una negación depende enteramente de la certeza o falsedad de la proposición que niega. La regla práctica es: *La negación de una proposición cierta es falsa y la negación de una proposición falsa es cierta.*

Apliquemos lo dicho a un ejemplo de una negación en lenguaje corriente. Se considera la negación,

Juan no es hermano de Luisa.

Para conocer la certeza o falsedad de esta proposición se necesita sólo conocer la certeza o falsedad de la proposición.

Juan es hermano de Luisa.

Si la segunda proposición es cierta, entonces la primera proposición, su negación, ha de ser falsa. Si la segunda proposición es falsa, entonces la primera proposición ha de ser cierta.

Tratemos de la negación $\neg P$. La proposición P puede ser cierta o falsa. Los valores de certeza posibles para la negación $\neg P$ son:

Si P es cierta, entonces $\neg P$ es falsa.
Si P es falsa, entonces $\neg P$ es cierta.

Ejercicio 2

A. Indicar cuando $P \ \& \ \neg Q$ es cierta (C) o falsa (F) en cada uno de los siguientes casos:

1. Si P es falsa y Q es cierta.
2. Si P es cierta y Q es falsa.
3. Si ambas P y Q son ciertas.
4. Si ambas P Q son falsas.
5. Si P es cierta y $\neg Q$ es cierta.

Disjunción. El término de enlace «o» es también un término de enlace de certeza funcional. Pero al considerar la certeza o falsedad de cada disjunción se ha de tener en cuenta que se ha utilizado el sentido *incluyente* de la palabra «o». Esto significa que en cualquier disjunción, por lo menos, una de las dos proposiciones es cierta y quizá ambas. Lo que se requiere es que *por lo menos* un miembro sea cierto. La regla práctica es: *La disjunción de dos proposiciones es cierta si y sólo si por lo menos una de las dos proposiciones es cierta.* Una vez más queda claro que para conocer la certeza o falsedad de la proposición $P \vee Q$ se ha de conocer la certeza o falsedad de las proposiciones P y Q.

Considérese la proposición en lenguaje corriente:

O Antonio ganó una apuesta en las carreras o ganó una apuesta en fútbol.

Para saber si la proposición es cierta o falsa es necesario saber si las proposiciones «Juan ganó una apuesta en las carreras» y «ganó una apuesta en fútbol» son proposiciones ciertas o falsas. Si por lo menos una de ellas es una proposición cierta, entonces la disjunción total es cierta. Además, si ambas proposiciones son ciertas, entonces la disjunción es también una proposición cierta. Si las proposiciones son ambas falsas, entonces evidentemente la disjunción ha de ser falsa.

Puesto que la disjunción liga dos proposiciones, también se tienen cuatro combinaciones posibles de certeza o falsedad. Para la disjunción $P \vee Q$ las cuatro posibilidades son, como en el caso de la conjunción,

P es cierta y Q es cierta.
P es cierta y Q es falsa.
P es falsa y Q es cierta.
P es falsa y Q es falsa.

Al determinar los valores de certeza de $P \vee Q$, se encuentra:

Si P es cierta y Q es cierta, entonces $P \vee Q$ es cierta.
Si P es cierta y Q es falsa, entonces $P \vee Q$ es cierta.
Si P es falsa y Q es cierta, entonces $P \vee Q$ es cierta.
Si P es falsa y Q es falsa, entonces $P \vee Q$ es falsa.

Ejercicio 3

A. Indicar si $P \vee Q$ es cierta (C) o falsa (F) en cada uno de los siguientes casos:

1. Si P es falsa pero Q es cierta.
2. Si P y Q son ambas ciertas.
3. Si P es cierta y Q es falsa.
4. Si P es falsa y Q es falsa.
5. Si P y Q son ambas proposiciones falsas.

B. Indicar si $\neg R \vee \neg S$ es cierta (C) o falsa (F) en cada uno de los siguientes casos:

1. Si R es cierta y S es cierta.
2. Si R es falsa y S es cierta.
3. Si R es cierta y S es falsa.
4. Si R es falsa y S es falsa.
5. Si a la vez R y S son ciertas.

Proposiciones condicionales. Si se conoce la certeza o falsedad de P y Q, entonces también se conoce la certeza o falsedad de $P \rightarrow Q$; porque la certeza o falsedad de $P \rightarrow Q$ es función, o depende, de la certeza o falsedad del antecedente y del consecuente. «Si... entonces...» es un término de enlace de certeza funcional.

Es decir, se sabe si es cierta o falsa una proposición tal como

(1) Si hay un eclipse entonces salen las estrellas

cuando se sepa si son ciertas o falsas las proposiciones «Hay un eclipse» y «Las estrellas salen».

De nuevo hay cuatro combinaciones posibles de certeza o falsedad de las dos proposiciones atómicas. Sólo dos de las posibilidades se presentan con frecuencia en el lenguaje ordinario. Primero, si «Hay un eclipse» es cierta y «Salen las estrellas» es cierta, la (1) ha de ser cierta. Segundo, si el antecedente «Hay un eclipse» es cierta pero el consecuente «Salen las estrellas» es falsa, entonces la (1) es falsa. Pero si suponemos que el antecedente es falso, no hay eclipse, y en Lógica, como la no existencia de eclipse no permite juzgar sobre la proposición (1), tanto si el consecuente: «Salen las estrellas» es cierto como si es falso, se dice que la condicional (1) es cierta. Este criterio se sigue también en Ciencias y en Matemáticas. Así la condicional (1) se puede considerar en un sentido amplio, según el cual sólo comunica lo que ocurrirá *si* hay un eclipse, por lo cual no se puede dar una calificación de falsedad a la proposición si no hay eclipse. Así en Lógica, si el antecedente de una condicional es falso, entonces toda la condicional se considera cierta, sin tener en cuenta si el consecuente es cierto o falso.

Examinando los cuatro casos anteriores se ve que la condicional completa es cierta si el consecuente «Salen las estrellas» es cierto independientemente de que el antecedente sea cierto o falso. Esto es consecuencia de que el único caso en que la condicional completa es falsa es cuando el antecedente «Hay un eclipse» es cierto, mientras que el consecuente «Salen las estrellas» es falso.

Si la regla que se acaba de exponer parece rara es porque se acostumbra a pensar que, en una proposición condicional, la verdad de hecho del consecuente depende en algún sentido de la verdad de hecho del antecedente. En Lógica no ocurre así. El contenido del antecedente no necesita estar relacionado en absoluto con el contenido del consecuente. Se puede considerar el valor de certeza de:

(2) Si el día es frío, entonces $3+3=6$,

a pesar de que efectivamente las dos proposiciones atómicas no tienen nada que ver una con la otra. Puesto que el consecuente de (2) es evidentemente una proposición cierta, (2) ha de ser a su vez una proposición cierta. La regla práctica es: *Una proposición condicional es falsa si el antecedente es cierto y el consecuente es falso; en todo otro caso la proposición condicional es cierta.* Como en el caso de las otras proposiciones moleculares que contienen ambas proposiciones **P** y **Q**, **P** $\longrightarrow$ **Q** tiene cuatro posibilidades de certeza y falsedad. Son:

P es cierta y **Q** es cierta.
P es cierta y **Q** es falsa.
P es falsa y **Q** es cierta.
P es falsa y **Q** es falsa.

Puesto que el valor de certeza de **P** $\longrightarrow$ **Q** está determinado únicamente por la certeza o falsedad de la sentencia **P** y de la sentencia **Q**, se pueden analizar sus valores de certeza de la manera siguiente:

Si **P** es cierta y **Q** es cierta, entonces **P** $\longrightarrow$ **Q** es cierta.
Si **P** es cierta y **Q** es falsa, entonces **P** $\longrightarrow$ **Q** es falsa.
Si **P** es falsa y **Q** es cierta, entonces **P** $\longrightarrow$ **Q** es cierta.
Si **P** es falsa y **Q** es falsa, entonces **P** $\longrightarrow$ **Q** es cierta.

Observando la lista anterior se ve que siempre que el antecedente de una proposición condicional es falso, la proposición condicional es una proposición cierta; y también que, siempre que el consecuente de una proposición condicional es cierto, la proposición condicional es una proposición cierta. El único caso en que la proposición condicional es falsa es el caso en que el antecedente es cierto pero el consecuente es falso.

Ejercicio 4

A. María dice, «Si este escrito es correcto, entonces $5 \times 2 = 10$». Se sabe que $5 \times 2 = 10$. Desde el punto de vista de la Lógica, ¿qué se puede decir del valor de certeza de la afirmación de María? ¿Por qué?

B. Indicar si **P** $\longrightarrow$ **Q** es cierto (C) o falso (F) en cada uno de los siguientes casos:

1. Si **P** y **Q** son ambas falsas.
2. Si **P** es cierta y **Q** es falsa.
3. Si **P** es cierta y **Q** es cierta.
4. Si **P** es falsa y **Q** es cierta.
5. Si **P** y **Q** son ambas ciertas.

C. Indicar si **R** $\longrightarrow \neg$**S** es cierta (C) o falsa (F) en cada uno de los casos siguientes:

1. Si **R** y **S** son ambas falsas.

2. Si **R** y **S** son ambas ciertas.
3. Si **R** es cierta y **S** es falsa.
4. Si **R** es falsa y **S** es cierta.
5. Si ni **R** ni **S** son proposiciones ciertas.

Equivalencia: Proposiciones bicondicionales. Se han considerado también proposiciones moleculares que contienen el término de enlace «si y sólo si». Estas proposiciones, las bicondicionales, se denominan también equivalencias. Un ejemplo de una equivalencia es

(1) Usted puede votar si y sólo si está inscrito.

Puesto que «si y sólo si» es un término de enlace de certeza funcional, la certeza o falsedad de la equivalencia depende de la certeza o falsedad de sus partes. Es decir, el valor de certeza de (1) depende de la certeza o falsedad de «Usted puede votar» y «Usted está inscrito».

Si ambas proposiciones «Usted puede votar» y «Usted está inscrito» son proposiciones ciertas, entonces la proposición bicondicional (1) es cierta. Además, si ambas proposiciones o miembros de la proposición bicondicional son falsos la proposición (1) es una proposición cierta. Por otra parte, si uno de los miembros de una proposición bicondicional es falso, aunque el otro miembro sea cierto, entonces la proposición bicondicional es una proposición falsa. La regla de uso quedará clara si se recuerda que una proposición bicondicional, o equivalencia, $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ tiene en esencia el mismo significado que dos condicionales, $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ y $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$. En consecuencia, siempre que se tenga una proposición bicondicional con un miembro cierto y un miembro falso, entonces una de las implicaciones que contiene tendrá un antecedente cierto y un consecuente falso, por lo que la proposición completa, será falsa.

La regla práctica para equivalencias es:

> *Una proposición condicional es cierta si y sólo si sus dos miembros son ambos ciertos o ambos falsos.*

De nuevo, puesto que la proposición bicondicional contiene dos miembros que ambos pueden ser o ciertos o falsos, hay cuatro combinaciones posibles de certeza o falsedad. Son:

P es cierta y **Q** es cierta.
P es cierta y **Q** es falsa.
P es falsa y **Q** es cierta.
P es falsa y **Q** es falsa.

Los valores de certeza de cualquier proposición bicondicional $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ pueden determinarse de la manera siguiente:

Si **P** es cierta y **Q** es cierta, entonces $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ es cierta.
Si **P** es cierta y **Q** es falsa, entonces $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ es falsa.
Si **P** es falsa y **Q** es cierta, entonces $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ es falsa.
Si **P** es falsa y **Q** es falsa, entonces $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ es cierta.

Ejercicio 5

Decir si $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ es cierta (C) o falsa (F) en cada uno de los casos siguientes:

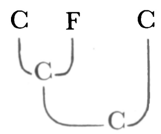
A. 1. Si **P** es cierta y **Q** es falsa.
2. Si ambas **P** y **Q** son ciertas.
3. Si **P** es falsa y **Q** es cierta.
4. Si **P** es cierta y **Q** es cierta.
5. Si **P** es falsa y **Q** es falsa.

B. ¿Es $\mathbf{P} \leftrightarrow \neg\mathbf{P}$ siempre cierta, siempre falsa, o depende el valor de certeza de esta equivalencia del valor de certeza de **P**?

● 3.3 *Diagrama de valores de certeza*

Independientemente de la longitud y de lo complicada que sea una proposición molecular, se pueden hallar sus valores de certeza si se conocen los valores de certeza de sus partes. Así se hará para cada tipo de proposición molecular utilizando las reglas prácticas que se han expuesto en las secciones que preceden a ésta. Una forma de analizar el valor de certeza de una proposición molecular es estableciendo un diagrama. Se supone que se tiene la proposición: $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})\ \&\ \mathbf{R}$ donde **P** es una proposición cierta, **Q** es una proposición falsa y **R** es una proposición cierta. El diagrama tendrá entonces la forma

$$(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})\ \&\ \mathbf{R}$$



Se empieza con las proposiciones atómicas, luego la proposición molecular menor, en este caso $P \lor Q$, y se continúa hasta el enlace final que une los dos miembros del término de enlace dominante. Para una proposición atómica, la «C» o «F» se pone inmediatamente debajo de la letra atómica. Para una proposición molecular, la «C» o «F» se pone debajo del término de enlace que domina la proposición. El término de enlace dominante en el ejemplo es «y». Puesto que P es cierta, la proposición $P \lor Q$ es cierta de acuerdo con la regla de aplicación para las disjunciones. Por tanto, se escribe la letra «C» en el enlace que une los dos miembros de la disjunción. Para que el término de enlace dominante, la conjunción, sea una proposición cierta, sus partes han de ser ciertas. Se ve que en este caso es así, puesto que $P \lor Q$ es cierta y el otro miembro de la conjunción R es también cierto. El enlace más largo que une el término de enlace dominante tiene una «C», lo que indica que la proposición completa es una proposición cierta.

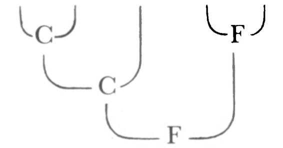
Se considera ahora el ejemplo,

$$(P \ \& \ Q \rightarrow P) \ \& \ (R \lor S)$$

donde P es cierta, Q es cierta, R es falsa y S es falsa. (Antes de continuar se ha de advertir que si una proposición atómica se presenta más de una vez dentro de una proposición molecular completa, entonces ha de ser tratada *de la misma manera* cada vez que se presenta. Por consiguiente, si la proposición P es cierta en una parte de la proposición molecular, entonces ha de ser cierta cada vez que se presenta en esta proposición. Si la proposición Q es falsa ha de ser falsa siempre que se presente. En el ejemplo anterior, la proposición P se presenta dos veces. Cualesquiera que sean sus valores de certeza, ha de tener el mismo valor de certeza las dos veces que se presenta.)

El diagrama de este ejemplo tendrá la forma:

$$(P \ \& \ Q \rightarrow P) \ \& \ (R \lor S)$$

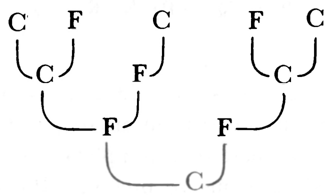


Se empieza por las proposiciones moleculares más pequeñas y se continúa en orden creciente de complicación. Los primeros enlaces son para la conjunción y la disjunción; luego se puede añadir el enlace para la proposición condicional, $P \ \& \ Q \rightarrow P$. Se termina con el enlace que une las dos partes de la conjunción, puesto que la conjunción es el término de enlace dominante. Según resulta, el primer miembro de la conjunción es cierto, pero el segundo miembro es falso. Por tanto, la misma conjunción, la proposición molecular completa, es una proposición falsa. Obsérvese que la proposición **P** es cierta en ambos casos tal como se había exigido. El último ejemplo será una proposición molecular un poco más complicada:

$$[(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})\ \&\ \neg\mathbf{A}] \to \neg(\mathbf{C} \to \mathbf{A}).$$

En esta proposición sea **A** cierta, **B** falsa, y **C** falsa. El diagrama que sigue muestra que la proposición completa, que es condicional, es una proposición cierta.

$$[(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})\ \&\ \neg\mathbf{A}] \to \neg(\mathbf{C} \to \mathbf{A}).$$



Obsérvese la proposición que es una negación. Puesto que **A** es una proposición cierta, entonces $\neg$**A** es falsa. Obsérvese también que el término de enlace dominante es $\to$, y por tanto su enlace se dibuja el último. En el caso de la condicional, el antecedente era falso y el consecuente era cierto. La regla práctica para las condicionales indica que en este caso la condicional es una proposición cierta.

En el ejercicio siguiente se pide el diagrama de certeza de algunas proposiciones moleculares. Si no se recuerdan bien las reglas prácticas para alguno de los términos de enlace, se puede consultar la sección anterior en la que se expusieron las reglas correspondientes.

Ejercicio 6

A. Determinar los valores de certeza de las siguientes proposiciones por medio de sus diagramas, si **P** y **Q** son proposiciones ciertas y **A** y **B** son proposiciones falsas.

1. $\mathbf{P} \to (\mathbf{P} \to \mathbf{Q})$

2. $(A \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow A)$
3. $(P \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow P)$
4. $(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg A)$
5. $\neg(P \,\&\, Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
6. $\neg(P \,\&\, B) \rightarrow (\neg P \,\&\, \neg B)$
7. $[(P \,\&\, Q) \rightarrow B] \rightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow B)]$
8. $\neg[(P \vee B) \,\&\, (B \vee A)]$
9. $(\neg P \vee B) \vee (\neg B \,\&\, A)$
10. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$

B. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son ciertas, si se supone:

N = «Nueva York es más grande que Chicago»
W = «Nueva York está al norte de Washington»
C = «Chicago es más grande que Nueva York»
(N y W son ciertas y C es falsa)?

1. $N \vee C$
2. $N \,\&\, C$
3. $\neg N \,\&\, \neg C$
4. $N \leftrightarrow \neg W \vee C$
5. $W \vee \neg C \rightarrow N$
6. $(W \vee N) \rightarrow (W \rightarrow \neg C)$
7. $(W \leftrightarrow \neg N) \leftrightarrow (N \leftrightarrow C)$
8. $(W \rightarrow N) \rightarrow [(N \rightarrow \neg C) \rightarrow (\neg C \rightarrow W)]$

C. Sea

P = '2+4=6'
Q = '2+8=10'
R = '3×4=12'
S = '2×0=2'.

Se conocen los valores de certeza de P, Q, R, y S. Hallar los valores de certeza de las proposiciones siguientes:

1. $(P \,\&\, Q) \,\&\, (R \,\&\, S) \rightarrow P \vee S$
2. $P \,\&\, Q \leftrightarrow R \,\&\, \neg S$

3. $(P \rightarrow Q) \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow (R \rightarrow S)]$
4. $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (S \leftrightarrow R)$
5. $(P \ \& \ Q) \vee S \rightarrow (P \leftrightarrow S)$
6. $(P \rightarrow \neg Q) \leftrightarrow (P \vee R) \ \& \ S$
7. $(Q \ \& \ R) \ \& \ S \rightarrow (P \leftrightarrow S)$
8. $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (S \rightarrow R)$
9. $S \rightarrow P \ \& \ Q$
10. $P \ \& \ Q \rightarrow S$

D. Sean «$x=0$» y «$x=y$» ciertas, y sean «$y=z$» y «$y=w$»falsas. Hallar los valores de certeza de las proposiciones siguientes.

1. Si $x=0$ y $x=y$, entonces $y \neq z$.
2. Si $x \neq 0$ o $y=w$, entonces $y=z$.
3. Si $x \neq y$ o $y \neq z$, entonces $y=w$.
4. Si $x \neq 0$ o $x \neq y$, entonces $y \neq z$.
5. Si $x=0$, entonces $x \neq y$ o $y \neq w$.
6. Si $x \neq 0$, entonces $y=z$.

• 3.4 *Conclusiones no válidas*

Hasta aquí todos los ejercicios de este libro en los que se pedía deducir conclusiones de conjuntos de premisas eran de tal naturaleza que la conclusión que se buscaba era efectivamente válida: se deducía de las premisas dadas. La Lógica sería realmente una materia trivial si siempre se supiera de antemano que la conclusión era consecuencia de las premisas. Evidentemente no ocurre así. Se ha de estar preparado para afrontar situaciones en las que no se sabe si la conclusión particular es o no consecuencia de las premisas dadas. Se desea poder probar cuándo una conclusión no es consecuencia lógica y cuándo una inferencia particular es *no válida*.

Supongamos dado un conjunto de premisas, y se trata de demostrar que cierta conclusión es consecuencia lógica de estas premisas, pero no se sabe deducir la conclusión deseada. Esto no basta para suponer que la proposición no es válida o que no se deduce de las premisas. Ha de existir algún método que permita demostrar sin género de duda que una conclusión no es consecuencia de las premisas dadas. A continuación se da un ejemplo de una demostración de esta naturaleza.

El razonamiento siguiente es no válido:

Si tú eres su hijo entonces él es tu padre.
Él es tu padre.
Entonces, tú eres su hijo.

Decir que este razonamiento no es válido es decir que la conclusión no es consecuencia lógica de las premisas. Al hablar de validez o no validez de las conclusiones se hace referencia a la *forma* del razonamiento. Respecto a su forma lógica, un razonamiento o es válido o es no válido. Si se simboliza el razonamiento, la misma forma se ve más fácilmente. Simbolizado, el razonamiento se presentaría en la forma

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ Q \\ \hline P \end{array}$$

Si ésta fuera una forma válida, permitiría *siempre* deducir sólo conclusiones ciertas de premisas ciertas. Por tanto, si hay algún caso en que esta forma permite deducir una conclusión falsa de premisas que son ciertas, entonces no puede ser válida. Para demostrar que un razonamiento no es válido se busca una *interpretación* de este razonamiento en el que las premisas sean proposiciones ciertas y la conclusión sea una proposición falsa. Se puede interpretar el razonamiento sustituyendo sus distintas proposiciones atómicas por proposiciones cualesquiera elegidas al arbitrio. La forma ha de permanecer siempre la misma.

Para demostrar que el razonamiento anterior no es válido se podría interpretar en la forma siguiente:

Sea

P = «Usted es un ciudadano de Maine»
Q = «Usted es un ciudadano de los Estados Unidos».

La interpretación diría:

> Si usted es un ciudadano de Maine, entonces usted es un ciudadano de los Estados Unidos.
> Usted es un ciudadano de los Estados Unidos.
> Por tanto, usted es un ciudadano de Maine.

Hay ciertamente muchos casos en los que estas premisas son proposiciones ciertas, pero la conclusión es falsa. Para cada ciudadano de los Estados Unidos las premisas son ciertas, pero para muchos ciudadanos de los Estados Unidos la conclusión es falsa. La forma del razonamiento original nos permite deducir una conclusión falsa de premisas ciertas. Por tanto, se ha demostrado que el razonamiento no es válido.

Este razonamiento que se acaba de considerar es un ejemplo de un error corriente: el error de «afirmar el consecuente». Lo importante en esta interpretación no era el contenido de las proposiciones «Usted es un ciudadano de Maine» y «Usted es un ciudadano de los Estados Unidos», sino sus valores de certeza posibles.

Ejercicio 7

A. Los razonamientos siguientes no son válidos. Para cada razonamiento, dar una asignación de certeza que demuestre su invalidez.

1. Si María termina pronto, entonces se irá a casa con Rosa.
   O se irá a casa con Rosa o encontrará a Antonia.
   María termina pronto.
   Por tanto, no encontrará a Antonia.
2. O el agua está fría o el día no es caluroso.
   El día es caluroso.
   Si el estanque se acaba de llenar, entonces el agua está fría.
   Por tanto, el estanque se acaba de llenar.
3. Jorge es elegido si y sólo si la votación es numerosa.
   La votación es numerosa.
   O Jorge es elegido o Juan no será nombrado.
   Por tanto, Juan será nombrado.
4. Si Pedro es elegido ganador, entonces Juan está fuera de combate.
   Si Pedro es elegido ganador, entonces Miguel está también fuera de combate.
   Juan está fuera de combate y Miguel está fuera de combate también.
   Por tanto, Pedro es elegido ganador.
5. O el animal no es un pájaro o tiene alas.
   El animal es un pájaro, entonces pone huevos.
   El animal no tiene alas.
   Por tanto, no pone huevos.
6. O la sustracción no es siempre posible en el sistema de números o el sistema incluye otros números además de los naturales.
   Si la sustracción es siempre posible en el sistema de números, entonces el sistema incluye los enteros negativos.
   El sistema no incluye otros números que los naturales.
   Por tanto, el sistema no incluye los enteros negativos.

B. Si cada uno de los razonamientos simbolizados a continuación es válido, dar una deducción de la conclusión por medio de una demostración formal completa. Si alguno no es válido, demostrarlo mediante una asignación de certeza.

1. Demostrar: $\neg S$
   (1) $T \& S \leftrightarrow R$
   (2) $\neg R$
   (3) T

2. Demostrar: S
   (1) $Q \rightarrow R$
   (2) $P \rightarrow Q$
   (3) $P \vee T$
   (4) $T \rightarrow S$
   (5) $\neg R$

3. Demostrar: $\neg Q$
   (1) $T \rightarrow Q$
   (2) $\neg T \vee R$
   (3) $\neg R$

4. Demostrar: S
   (1) $R \vee S$
   (2) $\neg P$
   (3) $Q \vee \neg R$
   (4) $P \leftrightarrow Q$

5. Demostrar: T
   (1) $\neg(P \vee Q)$
   (2) $P \vee R$
   (3) $T \rightarrow R$

6. Demostrar: $\neg R$
   (1) $P \rightarrow T$
   (2) $Q \rightarrow S$
   (3) $S \vee R$
   (4) $P \vee \neg Q$

7. Demostrar: $\neg S$
   (1) $\neg(P \& R)$
   (2) $Q \rightarrow R$
   (3) $Q \vee \neg S$

8. Demostrar: $\neg P$
   (1) $Q \rightarrow R$
   (2) $\neg R \rightarrow S$
   (3) $\neg T \vee \neg P$
   (4) $(Q \rightarrow S) \rightarrow T$

9. Demostrar: $R \vee \neg Q$
   (1) $S \& \neg T$
   (2) $T \rightarrow P$
   (3) $S \rightarrow R$
   (4) $\neg P \rightarrow \neg Q$

10. Demostrar: $\neg T$
    (1) $\neg P$
    (2) $\neg Q \vee \neg R$
    (3) $Q \leftrightarrow P$
    (4) $T \rightarrow R$

C. Mostrar por medio de una deducción formal o una asignación de certeza si cada uno de los razonamientos siguientes es válido o no válido:

1. O Juan y José tienen la misma edad, o Juan es mayor que José.
   Si Juan y José tienen la misma edad, entonces Pedro y Juan no tienen la misma edad.
   Si Juan es mayor que José, entonces Juan es mayor que María.
   Por tanto o Pedro y Juan no tienen la misma edad o Juan es mayor que María.
2. Si es diciembre, entonces el mes anterior fue noviembre.
   Si el mes anterior fue noviembre, entonces hace seis meses fue junio.
   Si hace seis meses fue junio, entonces hace once meses fue enero.
   Si el mes que viene será enero, entonces éste es diciembre.
   El mes pasado fue noviembre.
   Por tanto, éste es diciembre.
3. Si el contrato es válido, entonces Juan no perderá el pleito.
   Si Juan pierde el pleito, entonces tendrá que pagar costas.
   Si ha de pagar costas, entonces Pedro no recibirá su dinero.

Por tanto, o Pedro no recibirá su dinero o el contrato no es válido.

4. Si María está en lo cierto, entonces Jaime está equivocado.
   Si Jaime está equivocado, entonces Luis también está equivocado.
   Si Luis está también equivocado, entonces el espectáculo no es esta noche.
   O el espectáculo es esta noche o José no lo verá.
   María está en lo cierto.
   Por tanto, José no verá el espectáculo.
5. Si Brown cumplió el contrato, entonces las mercancías fueron suministradas en la fecha convenida.
   Brown o cumplió el contrato o su registro de envío está equivocado.
   Si su registro de envío está equivocado, entonces él no ordenó el envío el día siete.
   Por tanto, las mercancías no fueron suministradas en la fecha convenida.
6. $x^2=9 \quad \rightarrow \quad x=3 \quad \vee \quad x=-3$
   $x=3 \quad \vee \quad x=-3 \quad \rightarrow \quad xy<20$
   $xy \nless 20$
   Por tanto: $x^2=9 \quad \vee \quad xy<20$
7. $x^2=9 \quad \rightarrow \quad x=3 \quad \vee \quad x=-3$
   $x=3 \quad \vee \quad x=-3 \quad \rightarrow \quad xy<20$
   $xy \nless 20$
   Por tanto: $x^2 \neq 9$
8. $x \neq 0$
   $x=0 \quad \vee \quad \neg(x<1 \quad \vee \quad y \ngtr x)$
   $y>x \quad \rightarrow \quad y>1 \quad \& \quad x+y>2$
   Por tanto: $y>1 \quad \rightarrow \quad x<1$
9. $x \neq 0$
   $x=0 \quad \vee \quad \neg(x<1 \quad \vee \quad y \ngtr x)$
   $y>x \quad \rightarrow \quad y>1 \quad \& \quad x+y>2$
   Por tanto: $x+y>2 \quad \& \quad y>1$
10. $x^2-3x+2=0 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \vee \quad x=2$
    $x=1 \quad \vee \quad x=2 \quad \rightarrow \quad 3x>x^2$
    $3x \ngtr x^2$
    Por tanto: $3x>x^2 \quad \vee \quad x=1$

D. En las deducciones que siguen hay varios errores. Buscar los errores y corregirlos de manera que las demostraciones formales queden perfectamente correctas.

1.

(1)	P	P
(2)	$\neg T \vee \neg Q$	P
(3)	$\neg Q \rightarrow \neg P$	P
(4)	$\neg\neg P$	DN 1
(5)	$\neg Q$	TT 3, 4
(6)	$\neg T$	TT 2, 6

2.

(1)	$P \;\&\; Q$	P
(2)	$P \rightarrow \neg R$	P
(3)	$Q \rightarrow \neg S$	P
(4)	P	S 1
(5)	$\neg R$	TT 2, 4
(6)	Q	A 1
(7)	$\neg S$	PP 2, 6
(8)	$\neg R \;\&\; S$	A 5, 7
(9)	$\neg(R \vee S)$	DS 8

3.

(1)	$R \rightarrow Q$	P
(2)	$P \rightarrow Q$	P
(3)	$P \vee R$	P
(4)	$T \;\&\; S$	P
(5)	$Q \vee Q$	DS 1, 2, 3
(6)	Q	DN 5
(7)	S	A 4
(8)	$Q \;\&\; S$	A 5, 6
(9)	$(Q \;\&\; S) \vee U$	DS 8

● 3.5 *Demostración condicional*

Al llegar a este punto en el estudio de la Lógica estamos en condiciones de realizar algunas demostraciones complicadas. Sin embargo, hay algunas deducciones muy simples que no es posible efectuarlas con las reglas introducidas. Un ejemplo de una conclusión obvia que no se puede deducir todavía es la siguiente:

> Si José gana, entonces Luis es segundo.
> Si Carlos es segundo, entonces Luis no es segundo.
> Por tanto, si Carlos es segundo, entonces José no gana.

Simbolicemos este razonamiento para decidir si somos o no capaces de demostrar su validez:

Sea

P = «José gana»
Q = «Luis es segundo»
R = «Carlos es segundo».

La simbolización del razonamiento completo es:

$$\begin{array}{l} \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \rightarrow \neg \mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{R} \rightarrow \neg \mathbf{P} \end{array}$$

Las reglas que se conocen no son suficientes para deducir la conclusión en este razonamiento. También sería imposible encontrar una asignación de certeza en la que las premisas fueran ciertas y la conclusión falsa. Para que la conclusión sea falsa **R** y **P** han de ser ambas ciertas. Pero entonces, una u otra de las premisas es falsa cualquiera que sea el valor de la asignación de certeza dado a **Q**. Para deducir la conclusión, que es válida, se necesita una regla que no ha sido introducida hasta ahora.

La *regla de las premisas,* regla P, permite introducir una nueva premisa en una demostración siempre que se desee. Ésta puede ser cualquier proposición que se elija. En principio puede parecer absurdo, pues si se puede introducir cualquier premisa en cualquier momento parece que introduciendo la premisa conveniente se podrá probar cualquier cosa que se desee. La cuestión está, evidentemente, en que cada razonamiento lógico se apoya en *todas l*as premisas que utiliza. Si se introduce una premisa nueva, entonces cualquier conclusión que se deduzca del conjunto total de premisas, se apoyará sobre todas estas premisas y no sólo sobre el conjunto original de las mismas. Es decir, cada razonamiento lógicamente correcto no es mejor o peor que las premisas en las que se apoya. No es posible utilizar la regla P para deducir precisamente cualquier conclusión de un conjunto de premisas *dado,* pues en el momento que se introduce una premisa nueva, cada proposición deducida, depende, ya entonces de *todas* las premisas que se utilicen, incluyendo la premisa nueva.

Para indicar el conjunto completo de premisas sobre las que se basa una conclusión se utilizará el método siguiente. Cada vez que se introduce una premisa nueva en una deducción se moverá inmediatamente toda la demostración unos pocos espacios hacia la derecha. Esto indicará que cualquier proposición que sea deducida en esta parte derecha de la demostración final depende no sólo del conjunto original de premisas dado, sino también de la premisa adicional introducida.

El ejemplo dado anteriormente permite presentar un caso del nuevo uso de la regla P. En la línea (3) se introduce una nueva premisa R. A partir de esta línea hacia abajo obsérvese que la demostración se ha corrido varios espacios hacia la derecha.

(1)	$P \rightarrow Q$	P
(2)	$R \rightarrow \neg Q$	P
(3)	$\quad R$	P
(4)	$\quad \neg Q$	PP 2, 3
(5)	$\quad \neg P$	TT 1, 4

En la deducción precedente obsérvese la letra mayúscula P después de la proposición R en la tercera línea. Esto indica que la proposición agregada R está justificada por la regla de las premisas, regla P. Y al moverla varios lugares hacia la derecha se indica que R no es una de las premisas originales. Utilizando R, se podía deducir la proposición $\neg P$. La proposición $\neg P$, sin embargo, no se apoya sólo sobre el conjunto original de premisas, sino sobre el nuevo conjunto de premisas formado añadiendo la proposición R. Es esencial indicar que $\neg P$ no se deduce del razonamiento original mismo y que no es consecuencia lógica de las proposiciones $P \rightarrow Q$ y $R \rightarrow \neg Q$.

Se podría resumir la idea total en esta deducción diciendo que de las premisas originales, *si* se agrega la R, entonces se puede llegar a la conclusión $\neg P$. Esta idea está muy próxima a la de la nueva regla que se va a introducir y que permitirá completar la deducción en el razonamiento original hasta llegar a la conclusión. Considerando el razonamiento se ve que se intenta demostrar la proposición condicional $R \rightarrow \neg P$.

Esta nueva regla, la *regla de la demostración condicional* (CP) se enuncia como sigue:

> *Si es posible deducir una proposición* S *de otra proposición* R *y un conjunto de premisas, entonces se puede deducir sólo del conjunto de premisas la proposición condicional* $R \rightarrow S$.

En la deducción anterior era posible deducir la proposición $\neg P$ de la proposición añadida R y del conjunto original de premisas. Por tanto, se puede deducir la proposición condicional $R \rightarrow \neg P$ del conjunto de premisas solo. Puesto que la proposición condicional $R \rightarrow \neg P$ se deduce solamente del conjunto de premisas dado, se mueve esta línea de demostración hacia la izquierda de manera que se ponga en columna con las premisas originales.

La deducción completa de la conclusion a partir de las premisas en este ejemplo, se presenta ahora en la forma:

(1)	$P \to Q$	P
(2)	$R \to \neg Q$	P
(3)	$\quad R$	P
(4)	$\quad \neg Q$	PP 2, 3
(5)	$\quad \neg P$	TT 1, 4
(6)	$R \to \neg P$	CP 3, 5

Obsérvese en la deducción completa anterior, que se deduce la línea (6) por medio de la demostración condicional, utilizando las líneas (3) y (5). En la línea (3) se introduce el antecedente de la condicional y en la línea (5) se ha deducido el consecuente de la proposición condicional. Obsérvese también que la línea (6) se ha corrido hacia la izquierda para ponerla en columna con las premisas originales. Esto es debido a que la línea (6) se apoya únicamente en el conjunto original de premisas.

La idea intuitiva de una demostración condicional es realmente muy simple. La conclusión deseada es una proposición condicional, con el término de enlace «si... entonces...». En el ejemplo anterior, la conclusión que se desea lograr es «si R entonces $\neg P$». Al preguntar si la conclusión es consecuencia de las premisas dadas, se pregunta efectivamente si con las premisas dadas, *si* se tiene R entonces se puede obtener $\neg P$. En la línea (3) se dice, «Permítasenos agregar R, y veremos». La línea (5) muestra que si tenemos R y el conjunto original de premisas se puede deducir «si R entonces $\neg P$».

Una buena estrategia a seguir es ésta: Si la conclusión deseada de un razonamiento es una proposición condicional, añadiremos el antecedente como nueva premisa, correremos la demostración varios lugares hacia la derecha y finalmente trataremos de deducir el consecuente del conjunto original de premisas más la premisa añadida. Si se puede deducir el consecuente añadiendo el antecedente como una premisa, entonces por la regla CP se puede demostrar que la proposición condicional es consecuencia del conjunto original de premisas, y la demostración se podrá situar corriéndola hacia la izquierda debajo de las premisas originales. No siempre es necesario utilizar la demostración condicional para deducir una proposición condicional como conclusión. Pero si no se ve otra posible deducción se introducirá el antecedente como nueva premisa, para intentar una demostración condicional.

Otro ejemplo del uso de una demostración condicional en una deducción es el que se da a continuación. La conclusión que se desea es la proposición $D \to C$.

(1)	$A \to (B \to C)$	P
(2)	$\neg D \lor A$	P
(3)	B	P
(4)	$\qquad D$	P
(5)	$\qquad A$	TP 2, 4

(6)		$B \to C$	PP 1, 5
(7)		C	PP 3, 6
(8)	$D \to C$		CP 4, 7

La parte de la demostración que se ha corrido varios espacios hacia la derecha se denomina *demostración subordinada.* Da una respuesta a la pregunta, «¿Qué se podría demostrar si además de las premisas que se tienen se tuviera la premisa **D**? En la demostración subordinada se dice en efecto, «¡Veámoslo!». Y se encuentra que si se tuviera **D** entonces se podría obtener **C**. Así en la línea (8) se dice que con las premisas originales, si **D** entonces **C**.

Pero la regla P indica que se puede introducir una premisa en *cualquier* momento de una deducción. Pero *cada vez* que se añade una nueva premisa a las premisas dadas, la demostración ha de correrse hacia la derecha. Se supone que se está ya dentro de una demostración subordinada, y se estudia el ejemplo siguiente:

Demostrar: $P \to (\neg Q \to R)$

(1)	$S \,\&\, (\neg P \vee M)$			P
(2)	$M \to Q \vee R$			P
(3)	$\neg P \vee M$			S 1
(4)		P		P
(5)		M		TP 3, 4
(6)			$\neg Q$	P
(7)			$Q \vee R$	PP 2, 5
(8)			R	TP 6, 7
(9)		$\neg Q \to R$		CP 7, 8
(10)	$P \to (\neg Q \to R)$			CP 4, 9

La conclusión ha de ser una condicional, pues se ha intentado una demostración condicional.

Se introduce el antecedente, **P**, de la condicional deseada, y se intenta deducir el consecuente, $\neg Q \to R$. En la línea (6) se efectúa otra demostración condicional puesto que la $\neg Q \to R$ que se desea deducir es a su vez una condicional. Así se añade su antecedente $\neg Q$ y se corre de nuevo hacia la derecha. Esto da una demostración subordinada a la primera demostración subordinada. Después de deducir **Q**, se usa la regla de demostración condicional. Esto permite volver a la demostración a la que se está subordinado y da el consecuente que se quería deducir en la primera demostración subordinada. Aplicando CP de nuevo se vuelve a la demostración principal. Una aplicación de CP da fin a una subordinación. Se ha de señalar también que en cada paso se puede utilizar una línea cualquiera que aparezca antes en la *misma* demostración o antes en cualquier demostración a la que estemos subordinados. Así, en la línea (7) se puede usar la línea (2) y la línea (5). Pero después de la línea (9) no podrían utilizarse las líneas de la (6) a la (8), y después de la (10), las líneas de la (4) a la (9).

Ejercicio 8

A. Utilizar una demostración condicional para deducir la conclusión en cada uno de los siguientes razonamientos simbolizados. Dar una demostración formal completa.

1. Demostrar: $\neg P \rightarrow Q$
   (1) $P \vee Q$

2. Demostrar: $R \rightarrow \neg Q$
   (1) $\neg R \vee \neg S$
   (2) $Q \rightarrow S$

3. Demostrar: $C \rightarrow \neg D$
   (1) $B \rightarrow \neg C$
   (2) $\neg(D \;\&\; \neg B)$

4. Demostrar: $\neg Q \rightarrow T$
   (1) $S \rightarrow R$
   (2) $S \vee P$
   (3) $P \rightarrow Q$
   (4) $R \rightarrow T$

5. Demostrar: $P \rightarrow P \;\&\; Q$
   (1) $R \rightarrow T$
   (2) $T \rightarrow \neg S$
   (3) $(R \rightarrow \neg S) \rightarrow Q$

6. Demostrar: $S \rightarrow Q$
   (1) $R \rightarrow Q$
   (2) $T \rightarrow R$
   (3) $S \rightarrow T$

7. Dem. $\neg(R \;\&\; S) \rightarrow T$
   (1) $\neg P$
   (2) $\neg R \rightarrow T$
   (3) $\neg S \rightarrow P$

8. Dem. $T \vee \neg S \rightarrow R$
   (1) $\neg R \rightarrow Q$
   (2) $T \rightarrow \neg Q$
   (3) $\neg S \rightarrow \neg Q$

9. Dem. $T \rightarrow \neg(P \vee Q)$
   (1) $\neg S \vee \neg P$
   (2) $Q \rightarrow \neg R$
   (3) $T \rightarrow S \;\&\; R$

10. Dem. $\neg Q \rightarrow T \;\&\; S$
    (1) $R \rightarrow S$
    (2) $S \rightarrow Q$
    (3) $R \vee (S \;\&\; T)$

11. D $(P \;\&\; Q) \rightarrow (S \;\&\; T)$
    (1) $R \vee S$
    (2) $\neg T \rightarrow \neg P$
    (3) $R \rightarrow \neg Q$

12. Dem. $S \rightarrow P \vee Q$
    (1) $S \rightarrow T$
    (2) $R \rightarrow P$
    (3) $T \rightarrow R$

13. Demostrar: $\neg(P \vee R) \rightarrow T$
   (1) $Q \rightarrow P$
   (2) $T \vee S$
   (3) $Q \vee \neg S$

14. Demostrar: $E \rightarrow K$
   (1) $E \vee F \rightarrow G$
   (2) $J \rightarrow \neg G \ \& \ \neg H$
   (3) $J \vee K$

15. Demostrar: $Q \leftrightarrow \neg P$
   (1) $\neg(\neg P \ \& \ \neg Q)$
   (2) $S \rightarrow \neg Q$
   (3) $\neg P \vee S$

16. Demostrar: $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
   (1) $P \ \& \ Q \rightarrow R$

17. Demostrar: $x=0 \ \vee \ x=1 \ \rightarrow \ x^3-3x^2+2x=0$
   (1) $x=0 \ \rightarrow \ x^2-x=0$
   (2) $x=1 \ \rightarrow \ x^2-x=0$
   (3) $x=2 \ \vee \ x^2-x=0 \ \rightarrow \ x^3-3x^2+2x=0$

18. Demostrar: $y=2 \ \vee \ y=4 \ \rightarrow \ y<4 \ \vee \ y>3$
   (1) $(y=4 \ \rightarrow \ x>y) \ \& \ x>z$
   (2) $x>y \ \vee \ z>y \ \rightarrow \ y<4 \ \& \ y\neq 3$
   (3) $y=2 \ \rightarrow \ z>y$

19. Demostrar: $y=2 \ \rightarrow \ x=y$
   (1) $x\neq y \ \rightarrow \ x>y \ \vee \ y>x$
   (2) $y\neq 2 \ \vee \ x=2$
   (3) $x>y \ \vee \ y>x \ \rightarrow \ x\neq 2$

20. Demostrar: $x=1 \ \rightarrow \ x\neq 2 \ \& \ y\neq 1$
   (1) $x=1 \ \rightarrow \ xy=2$
   (2) $x+y\neq 3 \ \rightarrow \ x\neq 1$
   (3) $y=1 \ \vee \ x=2 \ \rightarrow \ \neg(x+y=3 \ \& \ xy=2)$

B. Dar una deducción completa para cada uno de los razonamientos siguientes para probar su validez.

1. O el testigo no dice la verdad, o Juan estaba en casa alrededor de las once.

Si Juan estaba en casa alrededor de las once, entonces él vio a su tío.
Si vio a su tío, entonces él sabe quién estuvo antes.
Por tanto, si el testigo dice la verdad, entonces Juan sabe quién estuvo antes.

2. O la Lógica es difícil o no les gusta a muchos estudiantes.
   Si la Matemática es fácil, entonces la Lógica no es difícil.
   Por tanto, si a muchos estudiantes les gusta la Lógica, la Matemática no es fácil.
3. Si los «Piratas» son terceros, entonces si los «Apaches» son segundos los «Bravos» serán quintos.
   O los «Gigantes» no serán primeros o los «Piratas» serán terceros.
   En efecto, los «Apaches» serán segundos.
   Por tanto, si los «Gigantes» son primeros, entonces los «Bravos» serán quintos.
4. Si Juan gana, entonces Luis o Esteban serán segundos.
   Si Luis es segundo, entonces Juan no ganará.
   Si Pedro es segundo, entonces Esteban no será segundo.
   Por tanto, si Juan gana, entonces Pedro no será segundo.
5. Si Isabel es su hermana, entonces Carlos es su hermano.
   Si Carlos es su hermano, entonces ella vive en la calle del Álamo.
   Por tanto, si Isabel es su hermana, entonces ella vive en la calle del Álamo.

C. Si los razonamientos que siguen son válidos, dar una demostración formal. Si no son válidos, escribir «no válido» al lado y demostrar la no validez por una asignación de certeza.

1. Si Antonio no es primero, entonces Pedro es primero.
   Pero Pedro no es primero.
   O Antonio es primero o Pablo es tercero.
   Si Jaime es segundo, entonces Pablo no es tercero.
   Por tanto, Jaime no es segundo.
2. Si el contrato es legal y Pérez entró en el contrato, entonces García ganará el pleito.
   O García no ganará el pleito o Pérez será responsable.
   Pérez no será responsable.
   Por tanto, o el contrato no es legal o Pérez no entró en el contrato.
3. Si esperamos a Rosa llegaremos tarde.
   O no llegaremos tarde o llegaremos a la escuela después de las 8 h, 30 m.
   Si llegamos a la escuela después de las 8 h, 30 m, entonces tenemos que presentarnos en secretaría.

Por tanto, si esperamos a Rosa, entonces o tenemos que presentarnos en secretaría o traemos una excusa por escrito.

4. Martín fue nombrado presidente.
   Si Ruiz fue elegido, entonces Martín no fue nombrado presidente.
   Si Alonso fue elegido, entonces la elección se hizo hoy.
   Por tanto, si Ruiz fue elegido o Alonso fue elegido, entonces la elección se hizo hoy.
5. O María está con Pilar o Luisa está con Pilar.
   Si hoy es lunes entonces María está con Pilar.
   Hoy es lunes.
   Por tanto, Luisa no está con Pilar.

Hallar los errores en las siguientes deducciones y corregirlos.

1.	(1)	$\neg T \vee \neg R$	P
	(2)	$S \rightarrow T \,\&\, R$	P
	(3)	$Q \rightarrow S$	P
	(4)	$Q \vee P$	P
	(5)	$\neg(T \,\&\, R)$	DL 1
	(6)	$\neg S$	TP 2, 3
	(7)	$\neg\neg Q$	TT 3, 6
	(8)	P	TP 3, 7
2.	(1)	$\neg S \rightarrow \neg T$	P
	(2)	T	P
	(3)	$S \rightarrow R \,\&\, Q$	P
	(4)	$Q \,\&\, R \rightarrow P$	P
	(5)	$\neg S$	TT 1, 2
	(6)	S	DN 5
	(7)	$R \,\&\, Q$	TT 3, 6
	(8)	$Q \,\&\, R$	A 7
	(9)	P	PP 5, 8
3.	(1)	$T \rightarrow \neg R$	P
	(2)	$S \rightarrow Q$	P
	(3)	$\neg Q \vee R$	P
	(4)	T	P
	(5)	$\qquad \neg R$	PP 2, 4
	(6)	$\qquad Q$	TP 3, 5
	(7)	$\qquad \neg S$	PP 2, 6
	(8)	$\neg S$	CP 4, 7

E. Si los razonamientos siguientes son válidos, dar una demostración formal. Si no son válidos, escribir «no válido» junto a ellos y demostrar la no validez mediante una asignación de certeza.

1. Si $x=0$, entonces $x+y=y$
   Si $y=z$, entonces $x+y\neq y$
   Por tanto, si $x=0$, entonces $y\neq z$.
2. Si $x=0$, entonces $y\nless z$
   O $x\neq 0$ o $x<y$. $y<z$
   Si $z<w$, entonces $x\nless y$
   Por tanto, $z\nless w$.
3. Si $x<y$, entonces $y=z$
   Si $x>y$, entonces $y>z$
   Por tanto, si $x<y$ o $x>y$ y, entonces $y=z$ o $y>z$.
4. Si $x=y$, entonces $y=z$
   Si $y=z$, entonces $x=0$
   Si $x\neq 0$, entonces $w\neq 0$.
   Por tanto, si $w=0$, entonces $x\neq y$.
5. O $x>y$ o $y>x$.
   Si $y>x$, entonces $x\neq 0$
   Si $x\neq 0$, entonces $y\neq w$
   Por tanto, si $y=w$, entonces $x>y$.
6. Si $y=0$, entonces $x>z$.
   Si $x>z$, entonces $z=w$.
   O $y=0$, o $x>z$ y $x=0$
   Por tanto, si $z\neq w$, entonces $x=0$

3.6 *Consistencia*

Se consideran las tres proposiciones siguientes:

1. Richard Nixon ganó las elecciones presidenciales de 1960.
2. Mi hermano pequeño puede levantar un peso de dos toneladas.
3. Tomás es más alto que Andrés y Tomás no es más alto que Andrés.

Podremos probablemente convenir en que cada una de las proposiciones es falsa. Sin embargo, sabemos que son falsas por distintas razones.

La primera proposición se sabe que es falsa *de hecho*. Pero, en distintas circunstancias, hubiera podido ser cierta. Se puede decir también que la segunda proposición es falsa, pues ningún muchacho es suficientemente fuerte para levantar este peso en condiciones ordinarias. Todavía se podrían sugerir circunstancias en las que la proposición podría ser cierta; por ejemplo, en un navío espacial donde los objetos no son pesados.

La tercera proposición, sin embargo, *no puede ser cierta,* nunca y en ninguna parte. Es una proposición *lógicamente* imposible. No hace falta conocer el significado de «Tomás es más alto que Andrés» para saber que no puede ser cierta la proposición. Se deduce de su *forma* lógica.

Una proposición de la forma

$$(\mathbf{R})\ \&\ \neg(\mathbf{R})$$

se denomina una *contradicción.* Se dice que dos proposiciones son contradictorias si una es la negación de la otra. Una contradicción, entonces, es la conjunción de una proposición y su negación. Siempre es falsa. La proposición (3) anterior es de la forma

$$\mathbf{R}\ \&\ \neg\mathbf{R}$$

y, por tanto, es una contradicción.

Con dos diagramas de certeza se puede mostrar fácilmente que una contradicción es *lógicamente* falsa.

Se ve en ellos que $\mathbf{R}\ \&\ \neg\mathbf{R}$ es falsa cualquiera que sea el valor de certeza de la proposición atómica **R**. No existe ninguna posibilidad de que sea cierta. Esta es la razón por la que se denomina *lógicamente* falsa.

Hay muchas formas que puede tomar una proposición que la hacen lógicamente falsa. Si la proposición no tiene la forma de una contradicción ($\mathbf{R}\ \&\ \neg\mathbf{R}$), puede reconocerse utilizando las reglas de deducción hasta llegar a una contradicción. Las reglas nunca permiten deducir una conclusión falsa de premisas verdaderas, de manera que si la conclusión es lógicamente falsa, entonces la premisa ha de ser también lógicamente falsa. Esto se ilustra por medio de

Ejemplo a.

(1) $\neg(\neg\mathbf{S} \lor \mathbf{S})$ P

Esta proposición no presenta la forma de una contradicción pero se puede deducir

$$\neg\neg S \ \& \ \neg S \qquad \text{DL}$$

y

$$\neg S \ \& \ \neg\neg S \qquad \text{CL.}$$

La línea (3) es de la forma $R \ \& \ \neg R$ y esto demuestra que la premisa no puede ser verdadera.

Otro ejemplo en el que la premisa es lógicamente falsa es:

Ejemplo b.

(1)	$(S \rightarrow R) \ \& \ \neg(\neg S \lor R)$	P
(2)	$S \rightarrow R$	S 1
(3)	$\neg(\neg S \lor R)$	S 1
(4)	$S \ \& \ \neg R$	DL 3
(5)	S	S 4
(6)	$\neg R$	S 4
(7)	R	PP 2, 5
(8)	$R \ \& \ \neg R$	A 7, 6

Las dos últimas líneas de esta demostración hubieran podido ser:

(7)	$\neg S$	TT 2, 6
(8)	$S \ \& \ \neg S$	A 5, 7.

No importa, pues, cuál sea la contradicción que en cada caso se ha deducido.

Ejercicio 9

Simbolizar cada una de las proposiciones siguientes. Decir si son o no lógicamente falsas. Si lo son, deducir una contradicción para demostrarlo.

1. Es jueves o no es jueves.
2. Si Juana es alta, entonces su hermano no es bajo, pero Juana es alta y su hermano es bajo.
3. No ocurre que José ganara la lucha y que José no ganara la lucha.
4. A la vez A no es igual a B y C es igual a B, y si C es igual a B, entonces A es igual a B.
5. $\neg(\neg(x<2 \ \lor \ x=2) \ \lor \ \neg(x \not< 2 \ \ \& \ \ x \neq 2))$

Se sabe que una contradicción, $P \& \neg P$, es la conjunción de una proposición y su negación. Si una de las proposiciones en la conjunción es una proposición cierta, entonces la otra ha de ser falsa; lógicamente no pueden ser ambas ciertas. Su conjunción, entonces, ha de ser una proposición falsa. Cada dos o más proposiciones que lógicamente no pueden ser ciertas a la vez se dice que son *inconsistentes*. Se dice que forman un conjunto inconsistente de proposiciones y juntas implican una contradicción.

En algunos casos lo que interesa no es deducir una conclusión particular, sino deducir si un conjunto de proposiciones es consistente o inconsistente. Para demostrar que unas premisas son inconsistentes se deduce una contradicción. Utilizando las reglas y métodos de deducción que ya conocemos, si es posible deducir una contradicción a partir de las premisas, se ha obtenido una demostración de que el conjunto de las premisas es inconsistente. Se ha demostrado que no pueden ser todas ciertas a la vez.

El método de demostración es el que se sigue para deducir una conclusión. En este caso, sin embargo, no se pretende deducir una conclusión particular, sino una contradicción cualquiera. No importa cual sea la contradicción deducida. Puede ser una proposición cualquiera que tenga la forma $P \& \neg P$.

Ejemplo c.

(1) Si Antonio gana la carrera, entonces Juan queda segundo.
(2) Antonio gana la carrera.
(3) Juan no queda segundo.

Se puede ver que estas tres proposiciones no pueden ser verdaderas simultáneamente. Sin embargo, cada dos de ellas pueden ser verdaderas a la vez. Se pueden traducir:

(1) $D \rightarrow J$
(2) D
(3) $\neg J$

Cualquiera de las dos demostraciones siguientes muestran que son inconsistentes.

(1) $D \rightarrow J$	P	(1) $D \rightarrow J$	P
(2) D	P	(2) D	P
(3) $\neg J$	P	(3) $\neg J$	P
(4) J	PP 1, 2	(4) $\neg D$	TT 1, 3
(5) $J \& \neg J$	A 3, 4	(5) $D \& \neg D$	A 2, 4

Ejemplo d.

(1) Si la región está cerca del ecuador, entonces el sol está siempre próximo al zénit.
Si el sol está siempre próximo al zénit, entonces la región tiene un clima tropical cálido.
Si la región tiene latitud grande, entonces no tiene clima tropical cálido.
Esta región está cerca del ecuador y tiene latitud grande.

La deducción siguiente muestra que es posible deducir una contradicción (línea 10) utilizando las reglas de inferencia lógica. Se tiene así una demostración de que las premisas del ejemplo son inconsistentes.

(1)	$E \to S$	P
(2)	$S \to H$	P
(3)	$A \to \neg H$	P
(4)	$E \,\&\, A$	P
(5)	A	S 4
(6)	$\neg H$	PP 3, 5
(7)	E	S 4
(8)	$E \to H$	HS 1, 2
(9)	H	PP 7, 8
(10)	$H \,\&\, \neg H$	A 6, 9

Otro ejemplo de una deducción que muestra que las premisas simbolizadas son inconsistentes es:

Ejemplo e.

(1)	$\neg(\neg Q \vee P)$	P
(2)	$P \vee \neg R$	P
(3)	$Q \to R$	P
(4)	$\neg\neg Q \,\&\, \neg P$	DL 1
(5)	$\neg\neg Q$	S 4
(6)	Q	DN 5
(7)	R	PP 3, 6
(8)	$\neg P$	S 4
(9)	$\neg R$	TP 2, 8
(10)	$R \,\&\, \neg R$	A 7, 9

EJERCICIO 10

A. Demostrar que los conjuntos de premisas siguientes son *inconsistentes* deduciendo una contradicción para cada uno.

1. (1) $\neg Q \to R$
   (2) $\neg R \vee S$
   (3) $\neg(P \vee Q)$
   (4) $\neg P \to \neg S$

2. (1) $T \to P$
   (2) $T \ \& \ R$
   (3) $Q \to \neg R$
   (4) $P \vee S \to Q$

3. (1) $R \to R \ \& \ Q$
   (2) $\neg S \vee R$
   (3) $\neg T \vee \neg Q$
   (4) $S \ \& \ T$

4. (1) $T \vee \neg R$
   (2) $\neg(R \to S)$
   (3) $T \to S$

5. (1) $Q \to P$
   (2) $\neg(P \vee R)$
   (3) $Q \vee R$

6. (1) $x=1 \;\to\; y<x$
   (2) $y<x \;\to\; y=0$
   (3) $\neg(y=0 \;\vee\; x\neq 1)$

7. (1) $x=y \;\to\; x<4$
   (2) $x \nless 4 \;\vee\; x<z$
   (3) $\neg(x<z \;\vee\; x\neq y)$

8. (1) $2\times 5=5+5 \;\leftrightarrow\; 2\times 6=6+6$
   (2) $3\times 4=10 \;\leftrightarrow\; 4\times 3=10$
   (3) $3\times 4=10 \;\vee\; 2\times 6=6+6$
   (4) $2\times 5\neq 5+5 \;\&\; 4\times 3\neq 10$

9. (1) $x<y \quad \rightarrow \quad x \neq y$
   (2) $y>z \quad \rightarrow \quad z \nless y$
   (3) $x=y \quad \& \quad y>z$
   (4) $x<y \quad \vee \quad z<y$

10. (1) $x=0 \quad \leftrightarrow \quad x+y=y$
    (2) $x>1 \quad \& \quad x=0$
    (3) $x+y=y \quad \rightarrow \quad x \ngtr 1$

Supóngase que no se sabe si un conjunto de premisas es consistente o inconsistente. Se intenta deducir una contradicción y no se logra. El hecho de no poder probar la inconsistencia deduciendo una contradicción no es una demostración de que las premisas son consistentes. Se necesita un método o técnica definida para la demostración de la consistencia de un conjunto de premisas. El método de asignación de certeza es la técnica apropiada.

Al decir que las premisas son inconsistentes se quiere indicar que no pueden ser simultáneamente ciertas. Por tanto, si es posible encontrar, por lo menos, una asignación de certeza en la que todas las premisas sean ciertas a la vez, entonces sabemos que no son inconsistentes. Una asignación de certeza en la que todas las premisas son ciertas da una demostración de que el conjunto de estas premisas es consistente. Consideremos las premisas:

Si Juana es joven, entonces Rosa es vieja.
Si Rosa es vieja, entonces Marta es joven.
Marta no es joven.

Para demostrar su consistencia se empieza simbolizando las proposiciones para poner de manifiesto su forma. Después se busca una asignación de certeza que hará verdaderas todas las proposiciones:

$J \rightarrow L$
$L \rightarrow M$
$\neg M$

C	F
	J
	L
	M

Premisas:	$J \rightarrow L$	$L \rightarrow M$	$\neg M$
	F F	F F	F
	C	C	C

Estos diagramas demuestran que es posible que todas las premisas sean ciertas en una asignación de certeza para las letras atómicas, lo que demuestra que las premisas son consistentes. La estrategia seguida en este ejemplo es la siguiente. Se observa en primer lugar que para hacer cierta la premisa $\neg$**M** se ha de asignar la F de falsa a la **M**. Entonces, para que la premisa **L**$\rightarrow$**M** sea cierta se ha de asignar la F a la **L**, , porque al consecuente **M** se le ha asignado la F de falso. Habiendo asignado la F a **L**, para hacer cierta la premisa **J** $\rightarrow$ **L** se ha de asignar la F a **J**, que completa las asignaciones de certeza para las proposiciones atómicas. Después se completan los diagramas de certeza, y se comprueba que estas asignaciones de certeza hacen, en efecto. ciertas las premisas conjuntamente.

Ejercicio 11

A. Demostrar que los siguientes conjuntos de premisas son *consistentes* presentando interpretaciones en las que todas las premisas sean ciertas:

1. (1) **Q** & $\neg$**S**
   (2) $\neg$(**P** $\vee$ **S**)
   (3) **Q** $\rightarrow$ **T**
2. (1) **P** $\rightarrow$ **Q**
   (2) **Q** $\rightarrow$ **R**
   (3) $\neg$**R** $\vee$ **S**
3. (1) **T** $\rightarrow$ **R**
   (2) $\neg$**R** $\rightarrow$ **S**
   (3) **S** $\vee$ **T**
4. (1) $\neg$**P** $\vee$ $\neg$**R**
   (2) $\neg$**P** $\rightarrow$ **S**
   (3) $\neg$**S**
5. (1) **R** $\rightarrow$ **Q**
   (2) **P** $\rightarrow$ **Q**
   (3) **Q** $\rightarrow$ $\neg$**T**
6. (1) $3\times5=12 \rightarrow 6+8=11$
   (2) $6+8=11 \rightarrow 13-9=7$
   (3) $3\times5\neq12$ & $13-9=7$

B. Para cada uno de los conjuntos de premisas siguientes, decidir si son consistentes o inconsistentes. Demostrar la respuesta.

1. Si María es la mayor, entonces José es más joven que Susana.
   María es la mayor e Isabel no es mayor que Susana.
   No ocurre que o Susana es la mayor o Isabel es mayor que Susana.
2. A es el vencedor y C no es el tercero.
   Si A es el vencedor, entonces B es el cuarto.
   Si C no es el tercero, entonces B no es el cuarto.
3. Juan está en la biblioteca y no ocurre que Tomás está en la clase de Historia o que Luis está en la clase de Historia.
   Si Pedro está en el laboratorio de Química, entonces Luis está en la clase de Historia.
   Si Miguel está en la clase de Geometría, entonces Tomás está en la clase de Historia.

(1)	$\neg Q \vee R$	P
(2)	$P \rightarrow \neg R$	P
(3)	Q	P
(4)	$\quad P$	P
(5)	$\quad \neg R$	PP 2, 4
(6)	$\quad \neg Q$	TP 1, 5
(7)	$\quad Q \,\&\, \neg Q$	A 3, 6
(8)	$P \rightarrow Q \,\&\, \neg Q$	CP 4, 7
(9)	$\neg P$	Ab 8

Obsérvese que ésta es una demostración condicional. La premisa que se añade es la negación de la conclusión que se desea. En cada demostración indirecta se deduce una contradicción, como en la línea (7) del ejemplo, de una premisa añadida, línea (4), y siempre se infiere la negación de la premisa añadida, línea (9). Si se utiliza sólo la ley del absurdo, entonces se necesitaría siempre un paso condicional como en la línea (8), antes de poder inferir la negación de la premisa añadida. Pero la regla de la demostración indirecta permite combinar este paso de demostración condicional y el uso de la ley de absurdo en un solo paso. No hace falta escribir la línea CP.

La regla de demostración indirecta (RAA) se expresa:

> *Si se puede deducir una contradicción de un conjunto de premisas y de la negación de* S, *entonces* S *puede deducirse del conjunto de premisas solo.*

Se utilizan las letras «RAA» (por *reducción al absurdo)* para refirirse a la regla de demostración indirecta.

Los pasos utilizados en una demostración indirecta son:

(1) Introducir la negación de la conclusión deseada como una nueva premisa.
(2) De esta nueva premisa, junto con las premisas dadas, deducir una contradicción.
(3) Establecer la conclusión deseada como una inferencia lógica deducida de las premisas originales.

El ejemplo que sigue ilustra el uso de una demostración indirecta para llegar a la conclusión deseada. La conclusión deseada es $\neg D$.

(1)	$D \rightarrow W$	P
(2)	$A \vee \neg W$	P
(3)	$\neg(D \,\&\, A)$	P

(4)	D	P
(5)	W	PP 1, 4
(6)	A	TP 2, 5
(7)	¬D ∨ ¬A	DL 3
(8)	¬A	TP 4, 7
(9)	A & ¬A	A 6, 8
(10) ¬D		RAA 4, 9

Examinemos la deducción anterior y observemos los tres pasos que siempre se dan en una demostración indirecta. El primer paso, la introducción de la negación de la conclusión deseada como una nueva premisa, se ve en la línea (4), pues **D** es la negación de **¬D**. El segundo paso, la deducción de una contradicción de la nueva premisa junto con las premisas dadas se consigue entre las líneas (5) y (9). La línea (9), **A & ¬A**, es la contradicción deducida. El tercer paso, estableciendo la conclusión deseada como una inferencia de las premisas, se encuentra en la línea (10). Nuestra conclusión **¬D**, se deduce por RAA de las premisas, teniendo en cuenta la premisa añadida en (4) y de la contradicción deducida de ella en (9) Al añadir la nueva premisa en la línea (4) la demostración se ha corrido hacia la derecha.

Una demostración subordinada indica que cada deducción del conjunto de premisas más la premisa añadida depende de la premisa añadida en adición con las tres originales. La conclusión de ella se ha retrocedido alineándola por la izquierda con el conjunto original de premisas, para indicar que se ha deducido lógicamente del conjunto original de premisas solamente. Una demostración subordinada puede terminarse sólo si se aplica CP o RAA.

Se considera otro ejemplo del uso de una demostración indirecta. En un juego de «baseball» se razona de la siguiente forma:

> Si Juan juega como primera base y Bill juega como lanzador contra nosotros, entonces el «Universitario» ganará.
> O el «Universitario» no ganará o el equipo terminará a la cabeza de la clasificación.
> El equipo no terminará a la cabeza de la clasificación.
> Además, Juan jugará como primera base.
> Por tanto, Bill no lanzará contra nosotros.

Para poner de manifiesto que basta una contradicción cualquiera que se obtenga, se dan dos demostraciones formales por RAA.

(1) J & B → S	P
(2) ¬S ∨ T	P
(3) ¬T	P

(4)	J		P
(5)		B	P
(6)		$J \mathbin{\&} B$	A 4, 5
(7)		$\neg S$	TP 2, 3
(8)		$\neg(J \mathbin{\&} B)$	TT 1, 7
(9)		$(J \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} \neg(J \mathbin{\&} B)$	A 6, 8
(10)	$\neg B$		RAA 5, 9

(1)	$J \mathbin{\&} B \rightarrow S$		P
(2)	$\neg S \vee T$		P
(3)	$\neg T$		P
(4)	J		P
(5)		B	P
(6)		$\neg S$	TP 2, 3
(7)		$\neg(J \mathbin{\&} B)$	TT 1, 6
(8)		$\neg J \vee \neg B$	DL 7
(9)		$\neg B$	TP 8, 4
(10)		$B \mathbin{\&} \neg B$	A 5, 9
(11)	$\neg B$		RAA 5, 10

Obsérvese en la segunda demostración que la línea (9) es $\neg B$, la conclusión deseada. Pero la demostración no es todavía completa porque está en una demostración subordinada, depende de la premisa añadida, no sólo de las premisas originales.

En el ejemplo que se acaba de dar, la conclusión se dedujo por demostración indirecta. La adición de B como una premisa conduce a una contradicción y, por tanto, podría concluirse la negación de B, $\neg B$. En el mismo ejemplo se hubiera podido deducir $\neg B$ por una demostración directa sin añadir una premisa. Ambos métodos son correctos. Como en todo juego, hay muchos movimientos diferentes permitidos por las reglas. La cuestión está en hacer los movimientos que conducirán a la meta, que es la conclusión deseada.

No existe ninguna regla general que nos diga exactamente cuándo se ha de usar una demostración directa y cuándo se ha de usar una demostración indirecta. En general, una demostración indirecta viene sugerida por un conjunto de premisas del cual no se ve fácilmente un punto de partida para la demostración. En tal situación, tal vez añadiendo una premisa: la negación de la conclusión deseada, se pueda encontrar el lugar por donde empezar. El segundo ejemplo de esta sección sobre demostraciones indirectas ilustra este dilema. En las premisas dadas se encontraban sólo condicionales y disjunciones de manera que no se encontraba punto de partida. Sin embargo, añadiendo una premisa, se tiene una proposición atómica que abre el camino a otros movimientos que conducen eventualmente a la conclusión.

Ejercicio 12

A. Demostrar que las conclusiones siguientes son válidas utilizando una *demostración indirecta.*

1. Demostrar: $\neg P$
   (1) $\neg(P \ \& \ Q)$
   (2) $P \rightarrow R$
   (3) $Q \vee \neg R$

2. Demostrar: $\neg T$
   (1) $T \rightarrow \neg S$
   (2) $F \rightarrow \neg T$
   (3) $S \vee F$

3. Demostrar: R
   (1) $\neg(P \ \& \ Q)$
   (2) $\neg R \rightarrow Q$
   (3) $\neg P \rightarrow R$

4. Demostrar: $\neg(A \ \& \ D)$
   (1) $A \rightarrow B \vee C$
   (2) $B \rightarrow \neg A$
   (3) $D \rightarrow \neg C$

5. Demostrar: $\neg E \vee M$
   (1) $S \vee O$
   (2) $S \rightarrow \neg E$
   (3) $O \rightarrow M$

6. Demostrar: $\neg T$
   (1) $P \vee Q$
   (2) $T \rightarrow \neg P$
   (3) $\neg(Q \vee R)$

7. Demostrar: $\neg(T \vee S)$
   (1) $\neg R \vee \neg B$
   (2) $T \vee S \rightarrow R$
   (3) $B \vee \neg S$
   (4) $\neg T$

8. Demostrar: $\neg P$
   (1) $P \rightarrow \neg S$
   (2) $S \vee \neg R$
   (3) $\neg(T \vee \neg R)$

9. Demostrar: $\neg S \vee \neg T$
   (1) $\neg P \rightarrow \neg S$
   (2) $\neg P \vee R$
   (3) $R \rightarrow \neg T$

10. Demostrar: R
   (1) $T \ \& \ R \leftrightarrow \neg S$
   (2) $\neg S \rightarrow T$
   (3) $\neg R \rightarrow \neg S$

11. Demostrar: $\neg(y=1 \rightarrow x^2 \not> xy)$
   (1) $x=1 \vee \neg(x+y=y \vee x \not> y)$
   (2) $x>y \rightarrow x^2>xy \ \& \ y=1$
   (3) $x \neq 1$

12. Demostrar: $\neg(x=2 \leftrightarrow x=y)$
   (1) $x<y \rightarrow xy=x$
   (2) $x \neq y \quad \& \quad xy \neq x$
   (3) $x \nless y \ \vee \ y=1 \rightarrow x=2$

13 Demostrar: $2x=12 \rightarrow y=4$
   (1) $2x+3y=24$
   (2) $(x=6 \rightarrow y=4) \ \vee \ 2x=12$
   (3) $(2x=12 \rightarrow x=6) \ \vee \ 2x+3y \neq 24$
   (4) $x \neq 6$

14. Demostrar: $x=0$
   (1) $\neg(y \neq 1 \ \vee \ z \neq -1)$
   (2) $(x<y \quad \& \quad x>z) \quad \& \quad z=-1 \rightarrow x=0$
   (3) $\neg(y=1 \ \vee \ x=0) \ \vee \ (x<y \quad \& \quad x>z)$

15. Demostrar: $x=0$
   (1) $y=1 \rightarrow x=0 \ \vee \ x>y$
   (2) $z=-1 \rightarrow x=0 \ \vee \ x<z$
   (3) $x \ngtr y$
   (4) $x \nless z$
   (5) $y=1 \ \vee \ z=-1$

B. En la Sección **A** anterior se podía deducir la conclusión utilizando demostraciones indirectas. ¿Se podría dar una demostración directa en cada uno de los ejemplos de la Sección **A**? Si es así, indicar una demostración directa en la forma típica para cada ejemplo donde el método directo sea posible.

C. Cada una de las deducciones siguientes contiene errores. Hallar todos los errores y hacer las correcciones necesarias.

1. Demostrar: $\neg(\mathsf{V} \ \& \ \mathsf{R})$

(1)	$\mathsf{V} \rightarrow \mathsf{T}$	P
(2)	$\mathsf{T} \rightarrow \mathsf{S}$	P
(3)	$\mathsf{R} \rightarrow \neg\mathsf{S}$	P
(4)	$\mathsf{V} \ \& \ \mathsf{R}$	P
(5)	T	TP 1, 4
(6)	$\neg\mathsf{S}$	PP 2, 5
(7)	R	S 4
(8)	$\neg\neg\mathsf{S}$	PP 3, 7
(9)	$\neg\mathsf{S} \ \& \ \neg\neg\mathsf{S}$	A 6, 8

(10)	$V \,\&\, R \rightarrow \neg S \,\&\, \neg\neg S$	CP 4, 9
(11)	$V \,\&\, R$	RAA 10

2. Demostrar: $\neg(T \vee P)$

(1)	$\neg T \vee \neg R$	P
(2)	$\neg R \rightarrow S$	P
(3)	$\neg S \,\&\, \neg P$	P
(4)	$\neg R$	S 1
(5)	$\neg S$	PP 2, 4
(6)	$\neg\neg R$	TT 2, 5
(7)	T	TP 1, 6
(8)	$\neg P$	S 3
(9)	$T \,\&\, \neg P$	A 7, 8
(10)	$\neg(T \vee P)$	DL 9

● 3.8 *Resumen*

Hemos aprendido a demostrar la validez de inferencia casi de forma análoga a como se aprende a jugar un juego. Se parte de premisas dadas y el objetivo es alcanzar una conclusión particular. El camino que se sigue para ello es deducir proposiciones, de otras proposiciones que ya se han obtenido utilizando las reglas de inferencia. Cada movimiento que se realiza ha de estar permitido por una regla.

En una demostración formal se ha de justificar cada paso que se dé haciendo referencia a una regla de inferencia. También se ha de indicar las proposiciones de las que se ha deducido la nueva proposición. Las reglas permiten hacer muchos movimientos, pero la estrategia estriba en hacer aquellos que conducen al objetivo, la conclusión deseada.

La idea de inferencia se resume en esta forma:

De premisas ciertas se obtienen sólo conclusiones ciertas.

Puesto que las reglas de inferencia válida, permiten deducir sólo consecuencias ciertas de premisas ciertas, si se encuentra un caso en el que se ha deducido una conclusión falsa de premisas ciertas se sabe que la inferencia no es válida. Así, si se asignan valores de certeza a las proposiciones atómicas de manera que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa, se ha demostrado la no validez del razonamiento.

Además del método directo de demostración se puede utilizar con frecuencia la regla que permite introducir una premisa en la demostración. En una demostración condicional, por ejemplo, se introduce el antecedente de la conclusión (cuando es una proposición condicional) como premisa, y, si se puede deducir el consecuente, entonces se ha demostrado que la proposición condicional es consecuencia de las premisas originales. En una demostración indirecta, si introduciendo la negación de la conclusión deseada se puede deducir una contradicción de la forma $\mathsf{P} \ \& \ \neg\mathsf{P}$, entonces se puede afirmar la conclusión deseada por la regla de *reducción al absurdo*.

Algunas veces no se desea deducir una conclusión de un conjunto de premisas, y lo que se busca es determinar si un conjunto de premisas es consistente o inconsistente. Se demuestra que las premisas son inconsistentes si se puede deducir de ellas una contradicción de la forma $\mathsf{P} \ \& \ \neg\mathsf{P}$. Entonces se sabe que todas las premisas no pueden ser simultáneamente ciertas. Para demostrar la consistencia de premisas se halla una asignación de certeza en la que todas las premisas *sean* simultáneamente ciertas.

La teoría de la inferencia, de la que nos hemos ocupado hasta ahora, es la teoría proposicional de inferencia.

EJERCICIO 13

Ejercicios de repaso

A. En cada uno de los ejercicios siguientes, primero expresar las proposiciones con símbolos lógicos y después establecer y demostrar si son lógicamente falsas deduciendo una contradicción, o posiblemente ciertos como resultaría de una asignación de valores de certeza.

1. Hay cincuenta estados en los Estados Unidos, pero si los Estados Unidos no hubieran comprado Alaska a Rusia, entonces no habría cincuenta estados en los Estados Unidos.
2. No ocurre que o Juan toca la trompeta o no toca ningún instrumento, entonces Juan toca la trompeta.
3. A Luis le gusta el latín y no le gusta el latín.
4. $(\neg\mathsf{P} \ \& \ \mathsf{Q}) \ \& \ (\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{P})$.
5. $(\mathsf{P} \ \& \ \mathsf{Q}) \rightarrow (\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q} \vee \mathsf{R})$
6. $\neg[(\neg\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) \vee (\neg\mathsf{P} \vee \neg\mathsf{Q})]$
7. $\mathsf{P} \rightarrow \neg\mathsf{P}$
8. $\neg(\mathsf{P} \vee \neg\mathsf{P})$
9. $(x=3 \ \rightarrow \ x<4) \ \ \& \ \ x\neq 3$
10. $\neg((1=2 \ \rightarrow \ 2=1) \ \rightarrow \ 1\neq 2)$

B. Expresar los conjuntos siguientes de proposiciones en símbolos lógicos y después establecer y demostrar si son consistentes o inconsistentes.

1. Si Alicia está bien, entonces su temperatura no es 37,6.
   Alicia está bien si y sólo si su temperatura es 37,6.
   Pero si está bien y su temperatura no es 37,6 entonces ella no está bien.
2. Los nitratos se forman del nitrógeno atmosférico libre o los nitratos se forman de las proteínas descompuestas en el suelo.
   Si los nitratos se forman del nitrógeno atmosférico libre, entonces este proceso de formación de nitratos se denomina fijación del nitrógeno.
   El proceso no incluye liberación de amoníaco de las proteínas descompuestas.
   Si el proceso no incluye liberación de amoníaco de las proteínas descompuestas, entonces los nitratos no están formados de las proteínas descompuestas en el suelo.
3. No ocurre que o Juan compra una raqueta de tenis o compra una pelota de tenis.
   O Juan compra una pelota de tenis o no está satisfecho con la raqueta que ya tiene.
   Si Juan no compra una raqueta de tenis, entonces está satisfecho con la raqueta que ya tiene.
4. Si Antonio visita a José, entonces Pablo visita a Pedro.
   Si Pablo no visita a Pedro, entonces o Antonio y Pablo van al cine o acaban su trabajo de inglés.
   Pero Antonio y Pablo no acaban su trabajo de inglés.
   Además, Antonio y Pablo van al cine y Antonio no visita a José.
5. Si un hilo en un circuito eléctrico se funde y el hilo de otro no se funde, entonces el primer hilo tiene una resistencia más elevada, o ha pasado por él una corriente de mayor intensidad. Si el primer hilo tiene mayor resistencia, entonces una mayor cantidad de energía en el primer circuito se convirtió en calor.
   Si una corriente de mayor intensidad ha circulado por él, entonces una mayor cantidad de energía en el primer circuito se convirtió en calor.
   No ocurre que una mayor cantidad de energía eléctrica en el primer circuito se convirtiera en calor.
   No ocurre que un hilo en un circuito eléctrico se funda y el hilo en otro no se funda.

6. (1) $E \rightarrow G \vee H$
   (2) $J \rightarrow \neg H$
   (3) $G \& H$
   (4) $G \rightarrow \neg E$

7. (1) $P \& Q$
   (2) $P \rightarrow \neg R$
   (3) $\neg R \& S \rightarrow \neg Q$
   (4) $Q \rightarrow S$

8. (1) $U \rightarrow W \vee (R \vee S)$
(2) $W \vee R \rightarrow \neg U$
(3) $U \;\&\; \neg S$

9. (1) $P \rightarrow Q \vee R$
(2) $Q \rightarrow \neg P$
(3) $R \rightarrow \neg P$

10. (1) $x \neq y \;\;\&\;\; y \neq z$
(2) $\neg(x=z \;\vee\; x<z)$
(3) $z=2 \;\rightarrow\; y=z$
(4) $x<z \;\vee\; z=2$

C. En cada uno de los ejemplos que siguen, demostrar en forma típica completa que la conclusión es consecuencia de las premisas dadas o dar una asignación de certeza para mostrar que la conclusión no se deduce lógicamente.

1. Si el palo empieza a golpear al perro, entonces el perro empieza a morder al cerdo.
Si el perro empieza a morder al cerdo, entonces el cerdo saltará sobre el portillo.
El palo empieza a golpear al perro.
Por tanto, el cerdo saltará sobre el portillo.
2. Si el freno falla o el camino está helado, entonces el coche no parará.
Si el coche se revisó, entonces no fallarán los frenos.
Pero el coche no se revisó.
Por tanto, el coche no parará.
3. Si se ha construido una presa para suministrar potencia hidroeléctrica, entonces la industria fabril aumentará considerablemente.
Si no se ha construido una presa para suministrar potencia hidroeléctrica, entonces la economía se ha de basar totalmente en productos agrícolas.
Por tanto, o la industria fabril aumentará considerablemente o la economía se ha de basar totalmente en productos agrícolas.
4. O no hay muchos gatos o hay pocos ratones.
Hay muchas flores.
Si hay pocos ratones y hay muchas flores habrá muchos abejorros.
Por tanto, hay muchos gatos o habrá muchos abejorros.
5. Si el punto de una recta representa un entero, entonces el número se puede definir por un decimal infinito o por un par de decimales infinitos.
O el número se puede definir por un decimal finito o el número puede ser definido o bien por un decimal infinito o por un par de decimales infinitos.
El número no puede ser definido por un decimal finito.
Por tanto, el punto en la recta representa un entero.

6. Un gas denso (clorhídrico) se introduce en un frasco y sobre él se coloca un frasco que contenga un gas de menor densidad (amoníaco). Si los gases se mezclan por difusión, entonces el clorhídrico ha subido y el amoníaco ha descendido.
   Si el clorhídrico ha subido y el amoníaco ha descendido, entonces el movimiento de los gases es opuesto al originado por la gravedad.
   Si el movimiento de los gases es opuesto al originado por la gravedad, entonces el movimiento ha de ser debido al movimiento molecular.
   Por tanto, el movimiento ha de ser debido al movimiento molecular.

7. Demostrar: $\neg B \rightarrow \neg Q$
   (1) $R \rightarrow N$
   (2) $K \rightarrow B \vee R$
   (3) $Q \vee M \rightarrow K$
   (4) $\neg N$

8. Demostrar: $\neg J \vee C$
   (1) $J \vee S \rightarrow C \,\&\, V$

9. Demostrar: P
   (1) $R \vee Q \rightarrow \neg P$
   (2) $S \rightarrow \neg Q$
   (3) $\neg R \,\&\, S$

10. Demostrar: $B \vee C$
    (1) $A \rightarrow B$
    (2) $C \rightarrow D$
    (3) $A \vee D$

11. Demostrar: $G \vee J \rightarrow H \vee K$
    (1) $G \rightarrow H$
    (2) $J \rightarrow K$

12. Demostrar: C
    (1) $W \rightarrow F$
    (2) $F \,\&\, C \leftrightarrow W$
    (3) $\neg C \rightarrow W$

13. Demostrar: $C \,\&\, \neg D$
    (1) $A \,\&\, C \rightarrow B$
    (2) $\neg A \vee (C \vee D)$
    (3) $A \,\&\, B$

14. Demostrar: $P \,\&\, Q$
    (1) $P \leftrightarrow Q$
    (2) $P \vee Q$

15. Demostrar: $\neg S \rightarrow \neg R$
    (1) $R \rightarrow \neg Q$
    (2) $R \vee Q$
    (3) $R \rightarrow S$

16. Demostrar: $M \leftrightarrow N$
    (1) $M \vee N$
    (2) $N \leftrightarrow (M \rightarrow P)$
    (3) $P \vee (N \,\&\, Q)$
    (4) $Q \leftrightarrow (P \rightarrow N)$

17. Demostrar: $x=3$
    (1) $x^2-5x+6=0 \;\vee\; x^2-7x+12=0$
    (2) $x^2-7x+12=0 \;\leftrightarrow\; x=3 \;\vee\; x=4$
    (3) $x^2-5x+6=0 \;\leftrightarrow\; x=3 \;\vee\; x=2$

18. Demostrar: $z=3$
(1) $x<y \quad \& \quad y<z \quad \rightarrow \quad x<z$
(2) $(y<z \quad \rightarrow \quad x<z) \quad \rightarrow \quad z=3$
(3) $x<y$

19. Demostrar: $x \not< z$
(1) $x=y \quad \rightarrow \quad x \neq 0$
(2) $x=y \quad \& \quad z=-1$
(3) $x<z \quad \rightarrow \quad x \neq 0$

20. Demostrar: $\neg(2x+2y=8 \quad \leftrightarrow \quad y=2)$
(1) $y=2 \quad \rightarrow \quad 4x+y=6$
(2) $y=3 \quad \rightarrow \quad 2x+2y=8$
(3) $\neg(4x+y=6 \quad \vee \quad y \neq 3)$

Examen de repaso

I. Demostrar, mediante asignación de certeza o deducción, si cada una de las fórmulas es posiblemente cierta o lógicamente falsa.

a. $(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q})$ & $(\mathsf{P}$ & $\neg\mathsf{Q})$
b. P & $\neg[(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) \vee \mathsf{R}]$
c. $((\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}) \rightarrow \mathsf{Q}) \rightarrow \mathsf{Q}$
d. $(x \not< y \quad \rightarrow \quad y=x) \quad \& \quad (y=x \quad \rightarrow \quad x<y)$
e. $x=3 \quad \& \quad \neg(x \neq y \quad \vee \quad x=3)$

II. Demostrar, mediante asignación de certeza o deducción, si cada uno de los conjuntos de premisas siguientes es consistente o inconsistente.

a. (1) $\neg\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$
(2) $\neg\mathsf{R} \rightarrow \neg\mathsf{Q}$
(3) $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{R}$

b. (1) $\mathsf{P} \rightarrow (\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R})$
(2) P & $\neg\mathsf{R}$
(3) Q

c. (1) $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$
(2) $\mathsf{R} \rightarrow \mathsf{S}$
(3) $\mathsf{P} \vee \mathsf{G}$
(4) Q & S

d. (1) $\mathsf{A} \rightarrow (\mathsf{B}$ & $\mathsf{C})$
(2) $\mathsf{D} \rightarrow (\mathsf{A} \vee \mathsf{E})$
(3) $\mathsf{E} \rightarrow (\mathsf{C} \rightarrow \mathsf{F})$
(4) $\neg\mathsf{D} \vee \neg\mathsf{F}$

e. (1) $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q} \vee \neg\mathsf{R}$
(2) $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{R}$
(3) $\mathsf{P} \rightarrow \neg\mathsf{Q}$
(4) P

f. (1) $x \neq 1$
(2) $x+y \neq y \quad \rightarrow \quad x>0$
(3) $\neg(x>0 \quad \vee \quad y \neq 1)$
(4) $x+y=y \quad \leftrightarrow \quad x \neq 1$

III. Deducir, si es posible, la conclusión deseada de las premisas dadas en cada una de las siguientes. Si la conclusión no es consecuencia, escribir «no válida» y dar una asignación de certeza que lo demuestre.

a. O Francia era una monarquía en 1780 o Francia era una república en 1780.
Si Francia era una monarquía en 1780, entonces la Revolución americana precede a la Revolución francesa.
Francia no era una república en 1780.
Por tanto, la Revolución americana precede a la Revolución francesa.

b. Si el ángulo alfa es igual al ángulo beta, entonces el ángulo beta es igual a 45º.
Si el ángulo beta es igual a 45º, entonces el ángulo theta es igual a 90º.
O el ángulo beta es recto o el ángulo beta no es igual a 90º
El ángulo theta no es recto.
Por tanto, el ángulo alfa no es igual al ángulo beta.

c. Si Julio elige a Tomás como director de la campaña electoral, entonces ganará las elecciones. Si Julio no gana las elecciones, entonces continuará como editor del periódico.
Si continúa como editor del periódico, entonces Pablo será el editor asociado.
Por tanto, o Pablo será el editor asociado o Julio no elige a Tomás como director de su campaña electoral.

d. Demostrar: $\neg P$
(1) $P \rightarrow Q$
(2) $R \vee \neg Q$
(3) $\neg P \vee \neg R$

e. Demostrar: $C \vee \neg A$
(1) $A \rightarrow B$
(2) $\neg B \rightarrow C \vee D$
(3) $\neg D$

f. Demostrar: $\neg E$
(1) $E \rightarrow (G \vee H)$
(2) $G \rightarrow (H \rightarrow K)$
(3) $\neg L$

g. Demostrar: N
(1) $L \vee (M \,\&\, N)$
(2) $L \rightarrow N$

h. Demostrar: $A \rightarrow (C \rightarrow E)$
(1) $A \vee B \rightarrow (C \vee D \rightarrow E)$

i. Demostrar: $P \rightarrow S$
(1) $P \rightarrow Q$
(2) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
(3) $Q \rightarrow (R \rightarrow S)$

j. Demostrar: $x > y \;\rightarrow\; x = 5$

(1) $x - y = 2 \;\rightarrow\; (y = 3 \;\rightarrow\; x = 5)$

(2) $x \not> y \;\vee\; x - y = 2$

(3) $y = 3$

Demostrar: $xy - y \;\rightarrow$

(1) $x \not> y \;\rightarrow\; y = 2$

(2) $xy = y \;\vee\; x^2 = y \;\rightarrow\; x = 1$

(3) $x^2 = y \;\rightarrow$

(4) $-$ $\vee\; x \neq 1)$

l. Demostrar: $x = 1$

(1) $x = 1 \;\leftrightarrow\; x = y$

(2) $x = y \;\vee\; y \neq 1$

(3) $y \neq 1 \;\&\; x < y$

IV. Completar las demostraciones formales siguientes, poniendo en cad línea las abreviaturas de las reglas utilizadas y los números de las líneas partir de las cuales se han aplicado estas reglas.

Ejemplo: (1)	$\neg R \rightarrow S$	P
(2)	$\neg R$	P
(3)	S	PP 1, 2

a. (1) $x < y \;\&\; y \neq z$

(2) $y \neq z$

b. (1) $S \leftrightarrow \neg R$

(2) $(S \rightarrow R) \;\&\; (R \rightarrow S)$

c. (1) $\neg R \vee \neg R$

(2) $\neg R$

d. (1) $\neg S \vee P$

(2) $\neg P$

(3) $\neg S$

(4) $\neg P$

e. (1) $\neg A \rightarrow \neg(B \vee \neg C)$

(2) $\neg\neg B$

(3) B

(4) $B \vee \neg C$

(5 $\neg\neg A$

f. (1) $M \to \neg(P \lor Q)$
(2) $\neg(P \lor Q) \to N$
(3) $M \to N$

g. (1) $x+y=3 \quad \lor \quad (y=2 \quad \to \quad x+y=5)$
(2) $(y=2 \quad \to \quad x+y=5) \quad \lor \quad x+y=3$

h. (1) $R \to \neg Q$
(2) $Q \lor P$
(3) $\qquad \neg(\neg R \lor P)$
(4) $\qquad R \;\&\; \neg P$
(5) $\qquad R$
(6) $\qquad \neg Q$
(7) $\qquad P$
(8) $\qquad \neg P$
(9) $\qquad P \;\&\; \neg P$
(10) $\neg R \lor P$

i. (1) $(x \neq 3 \quad \lor \quad y=2) \quad \& \quad x>y$
(2) $(x=3 \quad \to \quad x=y) \quad \to \quad x \not> y$
(3) $\qquad\qquad y=2 \quad \to \quad x=y$
(4) $\qquad\qquad x \neq 3 \quad \lor \quad y=2$
(5) $\qquad\qquad\qquad\qquad x=3$
(6) $\qquad\qquad\qquad\qquad y=2$
(7) $\qquad\qquad x=3 \quad \to \quad y=2$
(8) $\qquad\qquad x=3 \quad \to \quad x=y$
(9) $\qquad\qquad x \not> y$
(10) $\qquad\qquad x>y$
(11) $\qquad\qquad x>y \quad \& \quad x \not> y$
(12) $\neg(y=2 \quad \to \quad x=y)$

j. (1) $\neg R \lor S$
(2) $\neg R \to A \;\&\; B$
(3) $S \to C$
(4) $(A \;\&\; B) \lor C$

CAPITULO 4

TABLAS DE CERTEZA

● 4.1 *Tablas de certeza*

Un método en general más conveniente que el diagrama para analizar los valores de certeza de proposiciones, es el de poner todas las posabilidades de certeza o falsedad en forma de una tabla. En efecto, todas las reglas de certeza funcional que se utilizan para proposiciones moleculares pueden resumirse en forma de tabla. *Estas tablas básicas de certeza* indican rápidamente si una proposición molecular es cierta o falsa si se conoce la certeza o falsedad de las proposiciones que la forman. Se dan a continuación las tablas básicas de certeza para los cinco términos de enlace de proposiciones. Si se conocen los valores de certeza de una proposición P y de una proposición Q, se busca la línea que presenta esta combinación particular de valores de certeza y en la misma línea en la columna de la proposición molecular se encontrará su valor de certeza.

Negación

P	¬P
C	F
F	C

Conjunción

P	Q	P & Q
C	C	C
C	F	F
F	C	F
F	F	F

Disjunción

P	Q	P ∨ Q
C	C	C
C	F	C
F	C	C
F	F	F

Condicional

P	Q	P → Q
C	C	C
C	F	F
F	C	C
F	F	C

Equivalencia

P	Q	P ↔ Q
C	C	C
C	F	F
F	C	F
F	F	C

En estas tablas se hallan resumidas todas las reglas de aplicación estudiadas. Si se tiene duda sobre alguna de estas reglas se pueden utilizar entonces estas tablas como tablas de referencia.

En el Capítulo 3 se indicó que necesitabamos un método general de determinación de validez por medio del cual pudiéramos estar seguros de la validez de cada regla de inferencia sugerida. Las tablas de certeza proporcionan un método mecánico para comprobar la validez. Se puede comprobar la validez de cualquier inferencia sin hacer referencia a una de las reglas particulares dadas que permita aquella inferencia.

Antes de desarrollar esta comprobación conviene volver bruscamente a la noción misma de inferencia válida. Si una inferencia es válida, entonces en cada posible interpretación o asignación de certeza, si las premisas son ciertas la conclusión del razonamiento será también cierta. Las tablas de certeza proporcionan todas las posibles asignaciones de certeza, y el método de comprobar la validez de cualquier inferencia es el siguiente: Primero, se escriben todas las combinaciones posibles de valores de certeza para las proposiciones atómicas incluidas en el ejemplo. Segundo, se determinan los valores de certeza para todas las *premisas* y de la conclusión del razonamiento. Tercero, se buscan las líneas que presentan todas las premisas como proposiciones ciertas; si la conclusión es también cierta para *cada* una de estas líneas, entonces el razonamiento es válido. Pero si hay *alguna* línea para la que todas las premisas son ciertas y la conclusión es falsa, el razonamiento no es válido y la conclusión no es una consecuencia lógica.

Se considera ahora un ejemplo de una regla de inferencia ya conocida. Se utilizará una tabla de certeza para confrontar la validez de la regla del *modus tollendo ponens*. Las premisas son de la forma $P \vee Q$ y $\neg P$. Por tanto, es necesario hallar todos los posibles valores de certeza para estas dos proposiciones. Para ello, primero se anotan todas las posibles combinaciones de certeza o falsedad para las proposiciones atómicas que constituyen las proposiciones moleculares. Las proposiciones atómicas son la proposición P y la proposición Q. El número de combinaciones posibles de certeza o falsedad depende del número de proposiciones atómicas que intervienen. En este caso se tienen dos proposiciones atómicas, y puesto que para cada una de ellas hay dos posibles valores de certeza, el número de líneas en la tabla de certeza será 2×2 o 2^2.* Se construye la tabla de certeza en la forma siguiente:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$
C	C	C	F
C	F	C	F
F	$\boxed{C}$	C	C
F	F	F	C

* Si hay tres proposiciones atómicas, entonces hay dos veces más, o sea, ocho combinaciones posibles de certeza o falsedad. Puesto que hay dos posibles valores de certeza para cada proposición atómica, entonces para tres proposiciones atómicas se tiene $2 \times 2 \times 2$ ó 2^3 combinaciones. La regla general es que si hay n proposiciones atómicas, entonces hay 2^n combinaciones de valores posibles de certeza.

El método para la formación de la tabla de certeza anterior es el siguiente: Se empieza poniendo todas las combinaciones de certeza o falsedad debajo de las proposiciones P y Q. El valor de certeza de las proposiciones moleculares depende de los valores de certeza de las proposiciones P y Q. Por tanto, al llenar la columna correspondiente a cada proposición molecular hay que referirse a los valores de certeza de sus partes. Por ejemplo, en la primera línea se tiene P como cierta y Q como cierta. Por tanto, $P \vee Q$ es una proposición cierta, y puesto que P es una proposición cierta $\neg P$ es falsa. Por otra parte, en la última línea de la tabla P y Q son ambas proposiciones falsas; por tanto, la proposición $P \vee Q$ ha de ser falsa, y $\neg P$ es cierta.

El paso siguiente es ver las líneas en las que *todas* las premisas del razonamiento son ciertas. En este caso, las premisas del razonamiento son $P \vee Q$ y $\neg P$. Mirando la tabla de certeza se ve que las premisas forman las dos últimas columnas de la tabla. Observando las columnas encabezadas por ellas se encuentra sólo un caso donde ambas premisas son simultáneamente ciertas. Esto ocurre en la tercera línea. Para indicar en las tablas que las premisas son simultáneamente ciertas se encierran las C en círculos para las premisas de la tercera línea. Puesto que una inferencia válida requiere que en todos los casos en que las premisas son ciertas la conclusión sea también cierta, la conclusión será también cierta en la tercera línea si el razonamiento es válido. La conclusión del razonamiento es Q. Se comprueba ahora la columna de la Q para el valor de certeza de la tercera línea. Puesto que se encuentra que es cierto, entonces se sabe que la inferencia en cuestión es válida. Para poner esto de manifiesto en la tabla se pone un cuadrado alrededor de la asignación de certeza de la conclusión en cada línea en la que todas las premisas son ciertas; es decir, en cada línea donde los valores de certeza de las premisas están señalados con un círculo.

Para presentar un contraste con la inferencia válida del *modus tollendo ponens* consideremos el error de afirmar el consecuente, discutido en el capítulo anterior. Lo que se pretende es mostrar cómo se puede utilizar el análisis de las tablas de certeza para demostrar que se trata de un error. Esta inferencia errónea tiene la forma

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ Q \\ \hline P \end{array}$$

Las premisas son $P \rightarrow Q$ y Q; la conclusión es P. Puesto que se tienen dos proposiciones atómicas, P y Q, la tabla de certeza ha de tener cuatro líneas. Ambas premisas son ciertas en las líneas (1) y (3) de la tabla, pero sólo en la línea (1) la conclusión P es también cierta. Al aparecer F en la columna P en la tercera línea se sabe por la tabla que la inferencia es errónea.

P	Q	P ⟶ Q
$\boxed{C}$	C	C
C	F	F
$\boxed{F}$	C	C
F	F	C

Es importante comprender exactamente el motivo por el cual la tabla de certeza muestra que esta inferencia es errónea. En la línea (3) se observa que P es falsa y Q es verdadera. Si se eligen dos proposiciones atómicas cualesquiera que tengan respectivamente estos valores de certeza, se pueden construir las premisas ciertas P ⟶ Q y Q y la conclusión falsa P. En este caso aparece sin más que la conclusión es falsa, pues es precisamente la proposición atómica P. Por ejemplo, sea P= «1 = 2» y Q= «0 = 0». Entonces la inferencia errónea sería:

Si 1 = 2 entonces 0 = 0
0 = 0
Por tanto, 1 = 2.

En el Capítulo 3, se sugirió un ejemplo de inferencia válida que no ha sido introducido como regla de inferencia. Se sugirió que de la proposición P ⟶ Q se podría inferir la proposición ¬P ∨ Q. Se puede comprobar la validez de esta inferencia construyendo la tabla de certeza apropiada. Las dos proposiciones atómicas son la proposición P y la proposición Q; así se empezará llenando las columnas P y Q. Después se obtienen los valores de certeza para la premisa P ⟶ Q. Para conseguir los valores de certeza para la disjunción ¬P ∨ Q, que es la conclusión deseada, se han de encontrar primero los valores de certeza para ¬P.

P	Q	¬P	P ⟶ Q	¬P ∨ Q
C	C	F	C	$\boxed{C}$
C	F	F	F	F
F	C	C	C	$\boxed{C}$
F	F	C	C	$\boxed{C}$

El método para llenar las columnas en la tabla de certeza anterior es: Colocar los valores de certeza en las columnas 1 y 2. Obtener la columna (3), ¬P, haciendo referencia a los valores de certeza de la columna 1. Se obtienen los valores para la columna 4 atendiendo conjuntamente a los valores de las columnas 1 y 2. Finalmente, se obtienen los valores de la columna 5 considerando la columna 2 y la columna 3, conjuntamente.

La columna 4 representa la única premisa en el ejemplo de inferencia. Se consideran los casos en los que esta premisa es cierta. Para esta premisa se tiene *cierta* como valor de certeza en las líneas (1), (3) y (4). Por tanto, se encierran en círculos las tres C. Si la inferencia es válida, entonces la conclusión será cierta en cada una de estas líneas. Confrontando la columna 5, que es la conclusión que se busca, se encuentra la letra C en cada línea en la que aparece la letra C para la premisa, como se indica por las C en cuadrados. Así se concluye que la inferencia sugerida es válida.

Para poner de manifiesto la potencia de este método de análisis, será útil considerar un ejemplo más complicado en el que no es posible de antemano saber nada de su validez o no validez. Se considera el siguiente razonamiento matemático.

Si $x=0$ y $y=z$, entonces $y>1$

$y \not> 1$

Por tanto, $y \neq z$.

Se desea saber si este razonamiento es válido. Aparecen en él tres proposiciones atómicas, que se simbolizan en la forma

$$\begin{aligned} A &= «x=0» \\ B &= «y=z» \\ C &= «y>1». \end{aligned}$$

Puesto que cada proposición atómica puede ser verdadera o falsa, hay $2^3=8$ combinaciones de certeza y, por tanto, ocho líneas en la tabla de certeza.*

Mediante los símbolos **A**, **B**, y **C**, el razonamiento considerado se puede simbolizar

$$\begin{array}{l} A \ \& \ B \rightarrow C \\ \neg C \\ \hline \neg B \end{array}$$

* Para estar cierto de haber obtenido las ocho combinaciones y no escribir alguna dos veces, puede ser útil el siguiente procedimiento sistemático. Se encabezan las tres primeras columnas con **A**, **B** y **C**. Debajo de **C** escribir alternativamente C y F. Debajo de **B** escribir alternativamente dos C y dos F. Y, finalmente, debajo de **A** escribir alternativamente cuatro C y cuatro F. Esta manera de asignar valores de certeza a las proposiciones atómicas dará todas las posibles combinaciones sin ninguna fila duplicada.

La tabla de certeza para ello es

A	B	C	A & B	A & B → C	¬C	¬B
C	C	C	C	C	F	F
C	C	F	C	F	C	F
C	F	C	F	C	F	C
C	F	F	F	C	C	$\boxed{C}$
F	C	C	F	C	F	F
F	C	F	F	C	C	$\boxed{F}$
F	F	C	F	C	F	C
F	F	F	F	C	C	$\boxed{C}$

Como indican los círculos, tres de las ocho líneas tienen las dos premisas ciertas, pero como indican los cuadrados, para una de estas líneas la conclusión no es cierta. La linea (6) muestra que el razonamiento es erróneo. Si se toma para x el valor 1, y para y y z el 0, se puede ver esto fácilmente:

Si $1=0$ y $0=0$, entonces $0>1$
$0 \not> 1$
Por tanto, $0 \neq 0$.

La primera premisa es cierta porque el antecedente es falso, y la segunda premisa es evidentemente cierta, pero la conclusión es claramente falsa.

Examinando esta tabla de certeza se observa que la columna 4 representa un paso intermedio. A & B no es ni una proposición atómica, ni una premisa ni una conclusión. Es una proposición molecular que es parte de una de las premisas. Esto ilustra una regla que debería seguirse siempre. La tabla de certeza para analizar un razonamiento debería tener una columna (a) para cada proposición atómica, y una columna (b) para cada proposición molecular que se presenta en el razonamiento. La condición (b) indica que habrá una columna cada vez que se presente un término de enlace en cada proposición con la excepción, que no es necesario repetir, de cuando el mismo término de enlace liga las mismas proposiciones dos veces. Así, si se tiene A & B y A & B → C se necesitaría sólo una columna para A & B. En el caso considerado se necesitarían siete columnas, tres para las proposiciones atómicas A, B, y C, y cuatro para las proposiciones moleculares A & B, A & B → C, ¬C y ¬B.

EJERCICIO 1

A. Mostrar por medio de una tabla de certeza cuál de los ejemplos de inferencia siguientes es válido. Construir la tabla de certeza completa y escribir las palabras «válida» o «no válida» junto a ella.

1. Si Isabel se retrasa, entonces Cristina es puntual.
   Si Isabel no se retrasa, entonces Cristina no es puntual.
   Por tanto, o Isabel se retrasa o Cristina es puntual.
2. Si tengo 18 años, entonces soy mayor que Pablo.
   Si no tengo 18 años, entonces soy más joven que Jorge.
   Por tanto, o tengo 18 años o soy más joven que Jorge.
3. O García no entrega la mercancía o el contrato se considera legal.
   Por tanto, si García entrega la mercancía, entonces el contrato se considera legal.
4. Si yo fuera el presidente, entonces viviría en Washington, D. C.
   No soy el presidente.
   Por tanto, no vivo en Washington, D. C.
5. Un átomo de hidrógeno tiene un protón en su núcleo y el número atómico del hidrógeno es uno.
   Por tanto, un átomo de hidrógeno tiene un protón en cada núcleo si y sólo si el número atómico del hidrógeno es 1.
6. Los terrenos sembrados continuamente se agotan si y sólo si no se han tomado medidas para restablecer los minerales extraídos por las cosechas.
   Por tanto, o los terrenos sembrados continuamente se agotan o se han tomado medidas para restablecer los minerales extraídos por las cosechas.
7. O AB es mayor que BC o AB no es igual a CD.
   Por tanto, AB no es igual a CD y AB es mayor que BC.
8. $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$ & $\neg\mathbf{Q}$.
   Por tanto, $\mathbf{P}$.
9. $\neg\mathbf{Q} \rightarrow \neg\mathbf{P}$.
   Por tanto, $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$.
10. $\mathbf{P} \rightarrow \neg\mathbf{Q}$. $\neg\mathbf{Q}$.
   Por tanto, $\neg\mathbf{P}$.

B. Completar la tabla de certeza dada a continuación para mostrar que la ley del silogismo hipotético es una buena regla.

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \to R$
C	C	C			
C	C	F			
C	F	C			
C	F	F			
F	C	C			
F	C	F			
F	F	C			
F	F	F			

C. Construir una tabla de certeza para demostrar que $\neg P \;\&\; \neg Q$ es consecuencia lógica de $\neg(P \vee Q)$.

D. Construir una tabla de certeza para probar que la regla de adjunción es una buena regla de inferencia.

E. Construir una tabla para probar que la regla, *modus tollendo ponens* es una buena regla.

F. Probar mediante una tabla de certeza cuáles de los siguientes razonamientos matemáticos son válidos y cuáles no son válidos.

1. $x=3$. Por tanto, $y=0 \;\to\; x=3$.
2. $x \neq y \;\to\; x=y$. $y=1 \;\vee\; x \neq y$. Por tanto, $y=1$.
3. $x<5 \;\to\; x \neq y$. $x \neq y \;\&\; x<5$. Por tanto, $x \nless 5 \;\&\; x=y$.
4. $x<3 \;\to\; x \nless 3$. Por tanto, $x \nless 3$.
5. $x=y \;\to\; x \neq y \;\&\; y=2$. Por tanto, $x \neq y$.
6. $x=y \;\to\; x=y \;\&\; y=2$. Por tanto, $x=y$.
7. $x<z \;\to\; x \neq y$. $\neg(x \nless z \;\&\; x=y)$. Por tanto, $x<z \;\vee\; x=y$.
8. $3 \nless y \;\to\; x>y$. $x>y \;\to\; (x \ngtr y \;\&\; 3 \nless y)$. Por tanto, $3<y \;\vee\; x>y$.
9. $x^2=4 \;\to\; x=2$. $\neg(x=2 \;\vee\; x^2 \neq 4)$. Por tanto, $x=2 \;\&\; x \neq 2$.
10. $x=2 \;\vee\; x<2$. $x=3 \;\to\; x \neq 2$. $x=3 \;\to\; x \nless 2$. Por tanto, $x \neq 3$.
11. $x=y \;\leftrightarrow\; y \neq 1$. $\neg(x=y \;\&\; y \neq 1)$. Por tanto, $y \neq 1$.
12. $x \neq y \;\to\; x<5$. $x \nless 5 \;\vee\; y<6$. $x=y \;\to\; y<6$.

4.2 *Tautologías*

Una proposición molecular es una *tautología* si es cierta, cualesquiera que sean los valores de certeza de las proposiciones atómicas que la componen. En una tautología se pueden sustituir sus proposiciones atómicas por otras proposiciones atómicas cualesquiera, ciertas o falsas, y la proposición es también cierta. Por ejemplo, para cualquier proposición atómica $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P}$$

es una tautología. Si $\mathbf{P}$ es cierta, entonces $\mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P}$ es cierta. Además, si es falsa, entonces $\mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P}$ es también cierta.

Se puede presentar esto mediante una tabla de certeza.

$\mathbf{P}$	$\neg \mathbf{P}$	$\mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P}$
C	F	C
F	C	C

En una tabla de certeza, si una proposición es una tautología, entonces cada línea ha de tener una «C» en la columna encabezada por ella, lo que indica que la proposición es siempre cierta independientemente de las combinaciones de los valores de certeza de sus proposiciones atómicas. Se ha de recordar que en cada caso particular una proposición atómica tiene el mismo valor de certeza cada vez que se presenta dentro de una proposición molecular. Si $\mathbf{P}$ se presenta más de una vez en una proposición particular, entonces no puede ser cierta en un caso y falsa en el otro. Si es falsa, entonces es falsa cada vez que se presenta, y si es cierta, entonces es cierta cada vez que se presenta.

¿Es la proposición $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$ una tautología? Para responder a esta cuestión se puede construir una tabla de certeza.

$\mathbf{P}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$	$\mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$
C	C	C	C
C	F	C	C
F	C	C	F
F	F	F	C

En esta tabla se obtiene la tercera columna de las dos primeras en virtud de la regla práctica para las disjunciones. Se obtiene la última columna de la primera y la tercera en virtud de la regla práctica para condicionales. Si la proposición sugerida es una tautología ha de tener una «C» en cada línea de la cuarta columna. La letra «F» de falsedad en la tercera línea muestra que $P \vee Q \rightarrow P$ no es una tautología, pues la combinación de ser P falsa y Q ser cierta da lugar a la proposición $P \vee Q \rightarrow P$ que es falsa. La letra «F», en una única fila de la columna encabezada por la proposición en cuestión es suficiente para demostrar que la proposición no es una tautología.

Una definición formal de una tautología es:

> *Una proposición es una tautología si y sólo si permanece cierta para todas las combinaciones de asignaciones de certeza atribuidas a cada una de sus distintas proposiciones atómicas.*

El método de la tabla de certeza para determinar si una fórmula es una tautología utiliza esta definición. Independientemente de cuales sean las proposiciones atómicas que se sustituyan en una tautología, la proposición resultante será siempre cierta. Así se encuentra la «C» de certeza en cada línea de la columna final de la tabla, como en el ejemplo siguiente.

P	Q	P & Q	¬(P & Q)	P ∨ ¬(P & Q)
C	C	C	F	C
C	F	F	C	C
F	C	F	C	C
F	F	F	C	C

EJERCICIO 2

A. Si P y Q son proposiciones atómicas distintas, ¿cuáles de las siguientes son tautologías? Utilizar tablas de certeza.

1. $P \leftrightarrow Q$
2. $P \leftrightarrow P \vee P$
3. $P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$
4. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$
5. $(P \leftrightarrow P) \rightarrow P$
6. $P \vee Q \rightarrow P$
7. $P \,\&\, Q \rightarrow P \vee Q$
8. $\neg P \vee \neg Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$
9. $P \vee \neg Q \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$
10. $\neg P \vee Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$

B. Sean P, Q y R proposiciones atómicas distintas. Decidir mediante tablas de certeza cuáles de las proposiciones siguientes son tautologías.

1. $P \vee Q$
2. $P \vee \neg P$
3. $P \vee Q \rightarrow Q \vee P$
4. $P \rightarrow (P \vee Q) \vee R$
5. $P \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$
6. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$
7. $[(P \rightarrow Q) \leftrightarrow Q] \rightarrow P$
8. $P \rightarrow [Q \rightarrow (Q \rightarrow P)]$
9. $P \,\&\, Q \rightarrow P \vee R$
10. $P \,\&\, Q \rightarrow (P \leftrightarrow Q \vee R)$

● 4.3 *Implicación tautológica y equivalencia tautológica*

Una proposición **P** se dice que *implica tautológicamente* una proposición **Q** si y sólo si la condicional **P** $\rightarrow$ **Q** es una tautología. Así, una *implicación tautológica es una tautología cuya forma es la de una proposición condicional.* La proposición «Pérez apuesta por los "Gigantes" y López apuesta por los "Universitarios"», tautológicamente implica «Pérez apuesta por los "Gigantes"». Ya que cualesquiera que sean las proposiciones **P** y **Q**, **P** & **Q** $\rightarrow$ **P** es una tautología.

La noción de implicación tautológica es importante en el estudio de la validez de inferencias, pues cada ejemplo de inferencia proposicional puede expresarse como una implicación tautológica. Si se toman los ejemplos de inferencia que se encuentran a lo largo del Capítulo 2 se puede construir para cada uno de ellos una condicional cuyo antecedente es la conjunción de premisas y cuyo consecuente es la conclusión. Si la conjunción de las premisas es cierta, entonces la conclusión ha de ser cierta. Por lo tanto, a cada razonamiento proposicional corresponde una condicional y a cada condicional corresponde un razonamiento. *El razonamiento es válido si y sólo si la condicional correspondiente es una tautología.*

Para construir la condicional que corresponde a un razonamiento se ligan simplemente con & todas las premisas para formar la conjunción de premisas que es el antecedente, y después se pone la conclusión del razonamiento como consecuente, como en el siguiente ejemplo:

Razonamiento:

Demostrar: **R** & **S**

(1) **P**

(2) **P** $\rightarrow$ **Q**

(3) $\neg$**Q** $\vee$ (**R** & **S**)

Condicional correspondiente*

$$P \ \& \ (P \rightarrow Q) \ \& \ (\neg Q \vee (R \ \& \ S) \rightarrow R \ \& \ S$$

Por otra parte, si se desea construir el razonamiento para la condicional se escribe el consecuente como conclusión, y las diversas proposiciones cuya conjunción constituye el antecedente como las premisas del razonamiento.

* Algo en la forma **A** & **B** & **C** no es estrictamente correcto, pues **B** no puede figurar a la vez como segundo miembro de una conjunción y primero de otra. Para ser perfectamente preciso se necesitaría escribir (**A** & **B**) & **C** o **A** & (**B** & **C**). Pero puesto que son lógicamente equivalentes, se puede omitir el paréntesis.

Una manera de hablar de un razonamiento es diciendo que las premisas *implican* la conclusión. Cuando se dice que es una *implicación tautológica,* se indica con ello que la condicional correspondiente es una tautología y, por tanto, el razonamiento válido. Debido a esta correspondencia ente el razonamiento y su condicional, las proposiciones condicionales se consideran frecuentemente como implicaciones. Esto es particularmente conveniente cuando se discuten implicaciones tautológicas.

Ejercicio 3

A. Construir la condicional correspondiente a cada uno de los razonamientos siguientes.

1. Demostrar: R
   (1) $\neg\mathsf{Q}$
   (2) $\neg\mathsf{R} \rightarrow \mathsf{Q}$

2. Demostrar: $\neg(\mathsf{P}\ \&\ \neg\mathsf{Q})$
   (1) $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$

3. Demostrar: $x=y \ \rightarrow\ x<z$
   (1) $x=y \ \rightarrow\ x=5$
   (2) $x=5 \ \rightarrow\ x<z$

4. Demostrar: $\neg(\mathsf{A} \vee \mathsf{B})$
   (1) $\mathsf{C}\ \&\ \neg\mathsf{D}$
   (2) $\mathsf{C} \rightarrow \neg\mathsf{A}$
   (3) $\mathsf{D} \vee \neg\mathsf{B}$

B. Construir el razonamiento (premisas y conclusión) correspondientes a cada una de las condicionales siguientes.

1. $\mathsf{P}\ \&\ (\mathsf{Q} \vee \neg\mathsf{P}) \rightarrow \mathsf{Q}$
2. $\neg(x<0\ \ \&\ \ y\neq x) \ \rightarrow\ x\nless 0 \ \vee\ y=x$
3. $(\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{T} \vee \mathsf{R})\ \&\ \neg\mathsf{S}\ \&\ (\mathsf{R} \vee \mathsf{T} \rightarrow \mathsf{S}) \rightarrow (\mathsf{S} \rightarrow \mathsf{Q}\ \&\ \neg\mathsf{T})$
4. $(\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q})\ \&\ (\mathsf{P}\ \&\ \neg\mathsf{Q}) \rightarrow \mathsf{S}$

La regla de inferencia del *modus ponendo ponens,* considerada como una implicación tautológica, presenta la forma:

$$(\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q})\ \&\ \mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}.$$

El antecedente de la condicional es la conjunción de ambas premisas. El consecuente es la conclusión.

Otra implicación tautológica es:

$$(\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q})\ \&\ \neg\mathsf{Q} \rightarrow \neg\mathsf{P}.$$

Se puede reconocer esta implicación tautológica como expresión de la inferencia conocida por el *modus tollendo tollens*. El antecedente es la conjunción de dos premisas $P \rightarrow Q$ y $\neg Q$, y el consecuente es la conclusión $\neg P$.

Se puede demostrar si un ejemplo cualquiera de inferencia proposicional es válido, expresando la inferencia como una condicional y determinando por medio de una tabla de certeza si esta condicional es o no tautológica. Si la implicación es tautológica, entonces la inferencia es válida. Si la implicación no es tautológica, entonces la inferencia es no válida. Recuérdese que la implicación que se ha escrito tiene como antecedente la conjunción de todas las premisas y como consecuente la conclusión. Un ejemplo de comprobación de validez por tabla de certeza, donde la inferencia es la del *modus tollendo tollens,* es:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \mathbin{\&} \neg Q$	$(P \rightarrow Q) \mathbin{\&} \neg Q \rightarrow \neg P$
C	C	F	F	C	F	C
C	F	F	C	F	F	C
F	C	C	F	C	F	C
F	F	C	C	C	C	C

La implicación que aparece en la última columna es una implicación tautológica, pues se ve que cada fila en esta columna tiene una C. Si la implicación es una tautología, entonces la inferencia que deduce $\neg P$ de las premisas $P \rightarrow Q$ y $\neg Q$ es una inferencia válida.

Dos proposiciones se dice que son *lógicamente equivalentes* si en cualquier posible asignación de certeza las dos tienen el mismo valor de certeza. Esto se puede ver mediante una tabla de certeza. Se considera P y $\neg\neg P$

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
C	F	C
F	C	F

Esta tabla indica que en cualquier línea P y $\neg\neg P$ son ambas ciertas o ambas falsas. En ningún caso es una cierta y otra falsa. Por tanto, son lógicamente equivalentes. A continuación se utiliza una tabla de certeza para comprobar la equivalencia de $A \mathbin{\&} \neg B$ y $\neg(\neg A \vee B)$.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee B$	$\neg(\neg A \vee B)$	$A \mathbin{\&} \neg B$
C	C	F	F	C	F	F
C	F	F	C	F	C	C
F	C	C	F	C	F	F
F	F	C	C	C	F	F

Comparando las dos últimas columnas línea a línea se ve que bajo la misma asignación de certeza (en cualquier línea) tienen el mismo valor de certeza, ambas ciertas o ambas falsas. Así se sabe que son lógicamente equivalentes.

Ejercicio 4

Utilizar tablas de certeza para determinar para cada uno de los pares de proposiciones siguientes si son lógicamente equivalentes.

1. $\mathsf{P} \lor \neg\mathsf{Q}$
   $\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{P}$
2. $x=1 \quad \lor \quad x \nless 3$
   $\neg(x<3 \quad \& \quad x=1)$
3. $\mathsf{P} \lor \neg\mathsf{Q} \rightarrow \neg\mathsf{P}$
   $\mathsf{P} \rightarrow \neg\mathsf{P}\ \&\ \mathsf{Q}$
4. $\neg(\mathsf{A} \rightarrow \neg\mathsf{B}) \rightarrow \mathsf{C}$
   $\mathsf{B}\ \&\ \neg\mathsf{C} \rightarrow \neg\mathsf{A}$

Examinemos ahora la tabla de certeza para la bicondicional.

	P	Q	$\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q}$
(1)	C	C	C
(2)	C	F	F
(3)	F	C	F
(4)	F	F	C

Se observa que en la línea (1) y en la línea (4), en las que P y Q tienen la misma asignación de certeza (ambas ciertas o ambas falsas), la bicondicional es cierta; y que en la línea (2) y en la línea (3), en las que una es cierta y la otra es falsa, la bicondicional es falsa. Por lo tanto, la bicondicional conduce a la afirmación que P es equivalente a Q puesto que $\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q}$ es cierta siempre que tengan ambas los mismos valores de certeza, y falsa si sus valores de certeza son opuestos. Así, para cada par de proposiciones se puede construir una bicondicional colocando $\leftrightarrow$ entre ellas. Esta bicondicional es cierta siempre que las proposiciones tengan el mismo valor de certeza, y falsa cuando no lo tengan. Por esto, una bicondicional se denomina con frecuencia una *equivalencia.*

Ejercicio 5

Construir la condicional correspondiente a cada uno de los pares de proposiciones dadas en el Ejercicio 4.

Si dos proposiciones son lógicamente equivalentes, el valor de certeza de una es siempre el mismo que el valor de certeza de la otra, y su bicondicional correspondiente será *siempre* cierta. Se trata de una tautología. Por esta razón, proposiciones lógicamente equivalentes se llaman también proposiciones tautológicamente equivalentes y la bicondicional (o equivalencia) se denomina una equivalencia tautológica.

Esto proporciona un segundo método para determinar si dos proposiciones son lógicamente equivalentes: se construye la bicondicional correspondiente (equivalencia) y, por medio de la tabla de certeza se determina si la equivalencia resultante es una tautología (equivalencia tautológica).

EJERCICIO 6

Examinar las tablas de certeza para cada una de las bicondicionales construidas en el Ejercicio 5 y deducir de ellas si las proposiciones de cada uno de los pares en el Ejercicio 4 son tautológicamente equivalentes.

Ordinariamente no se usan las tablas de certeza para comprobar la validez de un razonamiento; en general se usa el método de deducción que se aprendió en el Capítulo 2. Hay dos razones poderosas para desarrollar la teoría de la inferencia proposicional y aplicar los métodos expuestos de llegar a las conclusiones a partir de premisas. Primero, excepto para las inferencias más simples, una tabla de certeza es muy grande y pesada de construir. Ya las tablas de certeza que contienen tres proposiciones atómicas resultan molestas porque tienen ocho combinaciones posibles de certeza o falsedad con las que hay que trabajar. La mayor parte de las deducciones que se presentan en seguida contienen más de tres proposiciones atómicas. Si un conjunto de premisas y la conclusión deseada contiene cinco proposiciones atómicas distintas, entonces la tabla de certeza adecuada ha de tener 32 líneas. No sólo tendría muchas líneas, sino que tendría también muchas columnas, porque en la mayoría de ejemplos de inferencia hay diversas premisas y no pocas proposiciones moleculares. Algunos de los ejemplos de inferencia para los cuales se puede deducir paso a paso una conclusión en 8 ó 9 líneas se necesitaría mucho más tiempo para demostrarlo por medio de una tabla de certeza. No sólo es aburrido el constuir una tabla tan masiva, sino que además es muy difícil el evitar equivocarse. Segundo, el método de la tabla de certeza sólo es adecuado para demostrar la validez de una cierta parte de los posibles razonamientos lógicos. Usaremos la teoría proposicional de inferencia desarrollada en el Capítulo 2 para poder continuar en el Capítulo 5 con otros tipos de inferencia lógica. La introducción de las tablas de certeza no es adecuada para las clases de razonamientos lógicamente válidos que se analizarán en los capítulos que siguen. Sin embargo, las tablas de certeza son un método general que puede ser utilizado siempre, para comprobar la validez o no validez de cualquier inferencia proposicional.

● 4.4 *Resumen*

Así como un diagrama de certeza, presentar los valores de certeza de una fórmula para una sola combinación de asignaciones de certeza para sus proposiciones atómicas, la tabla de certeza muestra los valores de certeza de la fórmula para todas las combinaciones posibles de asignaciones de certeza. Incluso con una tabla de certeza se puede hacer simultáneamente para varias fórmulas diferentes.

Para construir una tabla de certeza que dé todas las combinaciones posibles de asignaciones de certeza a n letras atómicas distintas, son necesarias 2^n líneas. Para cada letra atómica distinta se necesita una columna, y también se necesita una columna por cada término de enlace que se presente.

Una tautología es una proposición molecular cuya columna en una tabla de certeza no posee ninguna F.

Hay dos maneras de utilizar una tabla de certeza para determinar si un razonamiento es válido. El primero consiste en construir una tabla de certeza con una columna para cada premisa y la conclusión y analizar línea por línea para ver si la conclusión es cierta para cada línea en la que *todas* las premisas son ciertas. El otro método consiste en construir la condicional correspondiente y después utilizar una tabla de certeza para determinar si la condicional es una tautología (implicación tautológica).

Hay dos maneras de utilizar una tabla de certeza para determinar si dos proposiciones son lógicamente equivalentes. La primera consiste en construir una tabla de certeza con una columna para cada una de las proposiciones y después examinar la tabla línea por línea para ver si tienen siempre los mismos valores de certeza en cada línea. El otro método consiste en construir la correspondiente bicondicional y después utilizar la tabla de certeza para determinar si la bicondicional es una tautología (equivalencia tautológica).

EJERCICIO 7

Ejercicios de repaso

A. Se suponen conocidos los valores de certeza de las proposiciones atómicas en las proposiciones moleculares siguientes. Primero traducirlas totalmente en símbolos lógicos y después con aquellos valores de certeza utilizar diagramas de certeza para hallar los valores de certeza de cada proposición molecular. (Para los diagramas de certeza y las tablas de certeza todas las proposiciones atómicas, incluidas las proposiciones matemáticas, serán representadas por letras atómicas.)

1. Si dos y dos son cinco, entonces Colón no descubrió América y esto es un ejercicio lógico.
2. Si uno no es dos entonces, si dos por tres no son seis entonces, a la vez nueve menos cinco no es dos y uno es menor que dos.
3. Si no ocurre que la Luna está hecha de queso verde o que las vacas no tienen cuatro patas, entonces las finas vajillas chinas se rompen fácilmente si y sólo si se utilizan cucharas para comer.

B. Utilizar la tabla de certeza de las premisas y conclusión de cada uno de los razonamientos siguientes para decidir si es válido o no válido, aplicando el primer método de analizar línea por línea.

1. $(A \rightarrow B)$ & $(A \rightarrow C)$
   $\neg A$
   Por tanto: $\neg B \vee \neg C$
2. $(A \rightarrow B)$ & $(A \rightarrow C)$
   $\neg B \vee \neg C$
   Por tanto: $\neg A$

C. Determinar si los razonamientos siguientes son válidos, construyendo la condicional correspondiente y determinando por tablas de certeza si es una implicación tautológica.

1. $x \neq y \;\rightarrow\; x = y$
   Por tanto: $x = y$
2. $A \rightarrow B$ & A
   $B \vee \neg A \rightarrow C$
   Por tanto: $A \rightarrow C$

D. Sean A, B, y C tres proposiciones atómicas distintas cualesquiera. Decidir mediante tablas de certeza cuáles de las siguientes son tautologías.

1. $\neg(C$ & $\neg(D \vee C))$
2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$
3. A & $B \rightarrow (A \leftrightarrow B \vee C)$
4. $x = 3$ & $(x \neq y \;\rightarrow\; x \neq 3)$

E. Utilizando la proposición P & Q como premisa, determinar mediante tablas de certeza a cuáles de las siguientes implica tautológicamente.

1. P (Dar una tabla de certeza para P & $Q \rightarrow P$, por ejemplo).
2. P & $\neg Q$

3. $\neg P \vee Q$
4. $\neg Q \rightarrow P$
5. $P \leftrightarrow Q$

F. Utilizando la proposición $\neg P \vee Q$ como premisa determinar, mediante tablas de certeza, a cuáles de las siguientes implica tautológicamente.

1. P (Por ejemplo, dar una tabla de certeza para $\neg P \vee Q \rightarrow P$).
2. $Q \rightarrow P$
3. $P \rightarrow Q$
4. $\neg Q \rightarrow \neg P$
5. $\neg P \ \& \ Q$

G. ¿Es la proposición P tautológicamente equivalente a alguna de las siguientes?

1. $P \vee Q$
2. $P \vee \neg P$
3. $\neg P \rightarrow P$
4. $P \rightarrow \neg P$
5. $Q \vee \neg Q \rightarrow P$

H. Algunas de las reglas de inferencia introducidas en el Capítulo 2 son implicaciones tautológicas y algunas son equivalencias tautológicas. Utilizar tablas de certeza para mostrar cuáles de las siguientes son implicaciones tautológicas y cuáles son equivalencias tautológicas:

1. Ley de simplificación

   (Ver si $P \ \& \ Q \rightarrow P$ es una tautología y si $P \ \& \ Q \leftrightarrow P$ es una tautología).
2. Ley de doble negación

   (Ver si $P \rightarrow \neg\neg P$ es una tautología y si $P \leftrightarrow \neg\neg P$ es una tautología).
3. Ley de adición
4. Leyes conmutativas.
5. La nueva ley: De $P \rightarrow Q$ se puede inferir $\neg(P \ \& \ \neg Q)$.

Examen de repaso

I. En los ejemplos siguientes, primero hacer la traducción a símbolos lógicos utilizando las letras dadas para las proposiciones atómicas, después utilizar los diagramas de certeza para hallar los valores de certeza de las proposiciones moleculares a partir de los valores de certeza dados de las proposiciones que son las partes.

«Franklin nació antes que Washington» (cierta).
«Washington nació en el siglo dieciocho» (cierta).
«John Quincy Adams nació antes que John Adams» (falsa).
«Lincoln vivió durante el mismo período que Franklin» (falsa).

a. Si Franklin nació antes que Washington, entonces John Quincy Adams no nació antes que John Adams.
b. Si, o Lincoln vivió durante el mismo período que Franklin o John Quincy Adams nació antes que John Adams, entonces Washington nació en el siglo dieciocho.
c. Si Lincoln no vivió durante el mismo período que Franklin, entonces o Washington no nació en el siglo dieciocho o John Quincy Adams nació antes que John Adams.

II. Utilizar tablas de certeza para hallar la validez o no validez de los siguientes razonamientos simbolizados:

a. $\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}$
Por tanto: $\neg\mathsf{B} \rightarrow \neg\mathsf{A}$

b. $x<4$
Por tanto: $x=y \quad \vee \quad x<4$

c. $\mathsf{A} \rightarrow (\mathsf{B} \vee \mathsf{C})$
$\mathsf{C}\ \&\ \mathsf{B} \rightarrow \mathsf{C}$
Por tanto: $\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{C}$

d. $\mathsf{A} \vee \mathsf{B}$
Por tanto: A

III. Sean A, B, C, tres proposiciones atómicas distintas cualesquiera. Decidir mediante tablas de certeza cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías:

a. $\mathsf{A} \vee \neg\mathsf{A}$
b. $\neg\mathsf{A}\ \&\ \mathsf{B} \leftrightarrow (\mathsf{B} \rightarrow \mathsf{A})$
c. $\neg(\neg\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \rightarrow \neg\mathsf{B}\ \&\ \mathsf{A}$
d. $\mathsf{A} \rightarrow (\neg\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B})$
e. $[(\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}) \leftrightarrow \mathsf{B}] \rightarrow \mathsf{A}$

IV. Mostrar mediante tablas de certeza cuáles de las siguientes son implicaciones tautológicas.

a. $\neg P \vee \neg Q \rightarrow \neg P \;\&\; \neg Q$
b. $[(P \rightarrow Q) \;\&\; (R \rightarrow P)] \rightarrow (R \rightarrow Q)$

V. Mostrar mediante tablas de certeza cuáles de las siguientes, son equivalencias tautológicas.

a. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
b. $P \leftrightarrow P \vee Q$
c. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \neg P \vee Q$

CAPITULO 5

TÉRMINOS, PREDICADOS Y CUANTIFICADORES UNIVERSALES

● 5.1 *Introducción*

A lo largo del estudio de la inferencia lógica se ha examinado la forma lógica o estructura de proposiciones moleculares, pero no se ha analizado la estructura lógica de las proposiciones atómicas. Nos podemos plantear la siguiente cuestión: «Las reglas de inferencia hasta ahora consideradas, ¿permiten hacer todas las inferencias y deducir todas las conclusiones que se pueden pensar como válidas?». No es difícil encontrar ejemplos que contesten a esta cuestión con un «no». Consideremos el razonamiento siguiente:

Premisa: Todos los pájaros son animales.
Premisa: Todos los ruiseñores son pájaros.
Conclusión: Todos los ruiseñores son animales.

Parece, efectivamente, ser un razonamiento correcto. Se puede escribir en la forma general siguiente:

Premisa: Todos los B son A.
Premisa: Todos los R son B.
Conclusión: Todos los R son A.

Sean A, B y R objetos cualesquiera libremente elegidos. Siempre que las premisas sean ciertas se encontrará una conclusión cierta.

Por otra parte se puede simbolizar este razonamiento como se ha hecho en capítulos anteriores.

Sea

P = «Todos los pájaros son animales»
Q = «Todos los ruiseñores son pájaros»
R = «Todos los ruiseñores son animales».

Poniendo **P**, **Q**, **R** en lugar de estas proposiciones, el razonamiento se presenta en la forma

P	Premisa
Q	Premisa
R	Conclusión.

Es claro que no se puede deducir **R** de **P** y **Q** mediante las reglas consideradas hasta ahora.

Aparentemente se necesitan más reglas de inferencia para poder hacer todo lo que en Lógica se desea hacer. Pero antes de introducir nuevas reglas se ha de considerar cuidadosamente la estructura de las proposiciones atómicas.

EJERCICIO 1

A. En los razonamientos siguientes tanto las premisas como las conclusiones son proposiciones atómicas. A pesar de que las conclusiones no pueden deducirse mediante los métodos y reglas que se conocen hasta ahora, algunos de los razonamientos son válidos y otros no. Leer los razonamientos e indicar si la conclusión parece deducirse o nc de las premisas. (No se piden las deducciones, sino decir simplemente lo que *parece* lógicamente.) Una observación: no se confunda la verdad de hecho y la validez lógica.

1. Todas las ranas son anfibios.
   Todos los anfibios son vertebrados.
   Por tanto, todas las ranas son vertebrados.
2. Algunos estudiantes estudian Lógica.
   Todos los estudiantes que estudian Lógica conocen el vocablo «premisa».
   Por tanto, algunos estudiantes conocen el vocablo «premisa».
3. Todos los árboles de nuestro jardín pierden las hojas en otoño.
   Ningún pino pierde sus hojas en otoño.
   Por tanto, algunos de los árboles de nuestro jardín son pinos.
4. Todos los reptiles son animales de sangre fría.
   Todos los caracoles son animales de sangre fría.
   Por tanto, todos los caracoles son reptiles.
5. Todos los amigos de Pedro son chicos que juegan a baloncesto.
   Todos los chicos que juegan a baloncesto son altos.
   Por tanto, todos los amigos de Pedro son altos.
6. Algunas figuras de este papel son pentágonos.
   Todos los pentágonos tienen cinco lados.
   Algunas figuras de este papel tienen cinco lados.

7. Todo objeto que emite luz a causa de la energía de sus partículas es un cuerpo luminoso.
   La Luna no es un cuerpo luminoso.
   Por tanto, la Luna es un objeto que emite luz a causa de la energía de sus partículas.
8. Platón fue un filósofo griego.
   Algún filósofo griego fue ciudadano de Atenas.
   Por tanto, Platón fue ciudadano de Atenas.
9. A pesar de los depósitos ricos en petróleo, ninguna región del golfo de Persia es una región altamente industrializada.
   Irak es una región del golfo de Persia.
   Por tanto, Irak no es una región altamente industrializada.
10. Algunas fracciones son mayores que algunos números enteros.
    El número 8/2 es una fracción.
    El número 3 es un número entero.
    Por tanto, 8/2 es mayor que 3.
11. Ningún perro es anfibio.
    Koko es un perro.
    Por tanto, Koko no es anfibio.
12. Todos los consejeros de la ciudad viven dentro de la ciudad.
    Ninguno de los López vive dentro de la ciudad.
    Por tanto, ninguno de los López es consejero de la ciudad.
13. Ninguno de los pases de hoy sirven para entrar.
    Todos los pases que sirven para entrar van firmados por el presidente.
    Por tanto, ninguno de los pases de hoy va firmado por el presidente.
14. Ningún crustáceo pertenece al *phylum mollesca.*
    Todas las almejas y caracoles pertenecen al *phylum mollesca.*
    Por tanto, ninguna almeja o caracol son crustáceos.
15. Todo A es B.
    Todo B es C.
    Por tanto, todo A es C.
16. Algunos miembros del Consejo son demócratas.
    Algunos demócratas se oponen a la reelección de White.
    Por tanto, algunos miembros del Consejo se oponen a la reelección de White.
17. Algún A es B.
    Todo B es C.
    Por tanto, algún A es C.
18. Todas las proposiciones moleculares contienen términos de enlace.
    Algunas proposiciones moleculares contienen exactamente una proposición atómica.

Por tanto, todas las proposiciones que contienen términos de enlace tienen exactamente una proposición atómica.

19. Todas las proposiciones moleculares contienen términos de enlace.
    Algunas proposiciones moleculares tienen exactamente una proposición atómica.
    Por tanto, algunas proposiciones que contienen términos de enlace tienen sólo una proposición atómica.
20. Ninguno de estos barcos es de vela.
    Sólo los barcos de vela necesitan el viento para propulsión.
    Por tanto, ninguno de estos barcos necesita el viento para propulsión.

B. Sugerir una conclusión que se piense que podría ser consecuencia de las premisas dadas en cada uno de los ejercicios siguientes, aunque no se pueda de momento probar que la conclusión es válida. (También aquí lo que se pide es lo que *parece* deducirse, no deducir una conclusión por métodos formales.)

1. Todos los miembros del equipo ganaron en sus pruebas.
   Todos los que ganaron en sus pruebas recibieron medalla.
2. Ninguna proposición atómica contiene términos de enlace.
   Esta proposición es una proposición atómica.
3. Algunos mamíferos son animales herbívoros.
   Ningún animal herbívoro come carne.
4. Todos mis amigos esperarán la entrevista.
   Juan es uno de mis amigos.
5. Ningún miembro del comité está presente.
   Todas las personas directamente afectadas por la enmienda están presentes.

● 5.2 *Términos*

Empezaremos el análisis de las proposiciones atómicas buscando lo que son términos. Se consideran las proposiciones:

María está ausente.
Juan va despacio.
Este libro es rojo.
Dos es menor que tres.

En estas proposiciones los términos son las palabras «María», «Juan», «este libro», «dos» y «tres». Estos ejemplos sugieren una definición elemental:

> Un *término* es una expresión con la que se nombra o se designa un único objeto.

Más tarde se completará esta definición, pero ésta es la idea básica. Obsérvese que un término no ha de ser necesariamente un nombre como «María» o «Juan». Un término puede ser también una frase, como «este libro», «3+2», o «el primer presidente de los Estados Unidos», que se refiere a un individuo o cosa particular. Algunos términos son nombres y algunos son descripciones que se refieren a un individuo u objeto. Aunque en secciones posteriores se tratará la diferencia entre nombres y descripciones, será aquí útil considerar algunos ejemplos y distinguir los nombres de las descripciones.

Consideremos las proposiciones:

> Brasil es el mayor productor de café del mundo.
> Este libro es demasiado pesado.
> $1+1=2$.

En estas proposiciones se tienen como nombres «Brasil» y las cifras arábigas «1» y «2». Se tienen como descripciones las frases: «el mayor productor de café del mundo», «este libro», «1+1». Obsérvese que se considera la frase «1+1» una *descripción* que se refiere al número 2 y el número «2» un *nombre* del número 2. Evidentemente, se tiene más de un nombre para el número «2», se tiene la palabra castellana «dos» y el número romano «II». Igual que un nombre, una descripción que es un término, identifica una persona o cosa particulares.

Ejercicio 2

A. Señalar los términos en las proposiciones siguientes.

1. Este ejercicio es muy fácil.
2. China es el país más poblado del mundo.
3. El juego empezará pronto.
4. $5+4=3+6$.
5. Siete es mayor que tres más tres.
6. William Shakespeare es el autor de *Macbeth*.
7. Dos por tres es menor que siete por uno.
8. Juan es el presidente de nuestra clase.
9. Mi ejercicio de Matemáticas fue suspendido.
10. $2^3=8$.
11. Isabel II es la reina de Inglaterra.
12. París es la capital de Francia.

B. En las proposiciones siguientes, señalar de forma distinta los términos que son nombres y los que son descripciones.

1. El continente africano es mayor que el continente de Australia.
2. La raíz cuadrada de 25 es 5.
3. Juan es el corredor más rápido del equipo.
4. C es más que XXXII.
5. 4 por 20 es menor que 3 por 30.
6. Susana es ponente en la discusión de hoy.
7. La escalera de mano es muy insegura.
8. El tesorero de la clase de adultos es Pérez.
9. Los Andes son la cadena más larga de montañas del mundo.
10. $11+11=10+12$.
11. Este libro es muy informativo.
12. El país al norte de los Estados Unidos es Canadá.

5.3 *Predicados*

Consideremos la proposición:

Sócrates es sabio.

De la discusión de la Sección 5.2 se sabe que «Sócrates» es un término. ¿Qué se puede decir de la frase «es sabio»? No es un término, pero dice algo sobre Sócrates. La frase «es sabio» es un predicado. Ordinariamente, en proposiciones atómicas el sujeto de la proposición es un término y el predicado es el resto de la proposición que dice algo sobre el sujeto. En el ejemplo, el término «Sócrates» es el sujeto de la proposición, y la frase «es sabio» es el predicado que dice algo sobre Sócrates. Veamos algunos otros ejemplos.

Juan es nadador.
María canta.
Susana está triste.
José corre deprisa.

Se pueden distinguir los términos en estas proposiciones. Los predicados también aparecen claramente. Son «es nadador», «canta», «está triste», y «corre deprisa».

Se trata de ver cómo se pueden simbolizar estas proposiciones. Sea «S» el predicado «es nadador» y sea j=Juan. Entonces se puede simbolizar la proposición «Juan es nadador» por

$$Sj.$$

Sea «F» el predicado «canta» y m=María. Entonces se puede simbolizar la frase «María canta» por

$$Fm.$$

Se utiliza una sola letra para todo el predicado. Así, en la proposición «José corre deprisa» sea «R» el predicado «corre deprisa» y b=José. Entonces, la proposición se puede simbolizar por

$$Rb.$$

Ejercicio 3

A. ¿Cuáles son los predicados completos en las proposiciones siguientes?

1. Juana anda despacio.
2. El lector habla rápidamente.
3. Tomás puntúa.
4. El primer juego ha terminado rápidamente.
5. Juan es muy inteligente.
6. El que va al frente es el canciller.
7. El que entra ahora es el juez.
8. Ana puntúa más alto.
9. Antonio es un corredor muy rápido.
10. El presidente ha hablado.
11. Joaquín atiende con aplicación.
12. Susana cabalga.
13. La temperatura sube invariablemente.
14. Francisco vive cerca.
15. María canta bien.

Simbolizar las proposiciones siguientes:

Ejemplo: Jorge es corredor.

Sea «R» el predicado «es corredor».
Sea g=Jorge.
Entonces: Rg.

1. El rayo de luz se refracta.
2. El gentío se dispersó rápidamente.
3. Una fina brisa sopla.
4. El Gato Cheshire hace muecas.

5. El río Mississipi se desborda.
6. Susana anda graciosamente.
7. Juan entra.
8. El Sr. López se enfurruña.
9. El Sr. Pérez guisa.
10. Catalina está estudiando.
11. Aquella pintura es amable.
12. El caballo de Juan salta perezosamente.
13. El Sr. Blanco trabaja aquí cerca.
14. El sol estaba en el zénit.
15. Jorge está esperando pacientemente.

● 5.4 *Nombres comunes como predicados*

Algunas veces hay que tener cuidado en distinguir los términos de los predicados. Considérese:

Sócrates es un hombre.

Todos sabemos que «Sócrates» es un término. Se puede pensar también que «hombre» es un término, pero no identifica una persona o cosa particular. En la gramática castellana «hombre» se denomina nombre común precisamente porque no es el nombre de ninguna persona u objeto en particular. Desde el punto de vista de la Lógica es conveniente dejar que nombres comunes sirvan como partes del predicado; así, en la proposición anterior la frase «es un hombre» es el predicado, y el nombre común «hombre» por sí mismo no es un término.

Algunas otras proposiciones en las que los nombres comunes sirven como partes de predicados son

Chicago es una ciudad.
Einstein fue un científico brillante.
Marte es un planeta.

En estas tres proposiciones los nombres comunes «ciudad», «científico» y «planeta» son partes de los predicados.

En Gramática es útil distinguir entre predicados formados simplemente con un verbo y aquellos que tienen una estructura más complicada porque utilizan nombres comunes u otras partes del lenguaje. En Lógica esta distinción no tiene importancia. Lo que es importante y lo que hay que ver muy claro es la distinción entre términos y predicados. Recuérdese que términos son expresiones que nombran o describen algún objeto único. Predicados, por otra parte, no nombran objetos pero dicen algo acerca de ellos. Es natural decir que los predicados también describen objetos. Precisaremos más sobre este punto. En Lógica, cuando se dice que un término *describe* un objeto, se piensa que con esta descripción se sabe exactamente que objeto es. En este sentido un término describe *completamente* un objeto. Identifica aquel objeto particular. Por tanto, los nombres comunes pueden ser también partes de términos cuando describen una cosa particular. Por ejemplo «esta niña», o «el primer chico de la fila». Los predicados, por otra parte, sólo describen objetos parcialmente. De la proposición «María canta» se sabe algo sobre María por el predicado, pero sólo del predicado no se podría deducir que la proposición se refiere a María.

Tenemos, pues, dos partes distintas de una proposición, en la clasificación lógica, en las que pueden aparecer nombres comunes. Estos pueden usarse para construir términos como «en aquel hombre» o «el edificio en la esquina de la Avenida Diagonal y la calle de la Universidad». Y pueden ser utilizados también para construir predicados como en «es un estudiante diligente» o «es un árbol».

Para construir un término pueden utilizarse varios nombres comunes. Por ejemplo, el término «el hombre que robó en el banco» utiliza los nombres comunes «hombre» y «banco».

Ejercicio 4

A. Escribir cinco proposiciones atómicas *en cuyos predicados* aparezcan los nombres comunes: juego, niña, chico, escuela y edificio.

B. Escribir otras cinco proposiciones atómicas que utilicen nombres comunes distintos de los del Ejercicio A y de los ejemplos anteriormente dados.

C. ¿Cuáles son los nombres comunes en las proposiciones siguientes?

1. Julio es un estudiante.
2. Azul y amarillo son colores complementarios.
3. Esta anémona marina es un animal.
4. Estos pinos de California son árboles gigantes.
5. 3/4 es un número racional.
6. María es una enfermera.
7. El padre de Tomás es ingeniero.
8. Larry es un chico.
9. El Sr. Pérez es un corredor.
10. El Sr. Alonso es un profesor de Historia.

D. Anotar las proposiciones en las que hay nombres comunes. Después indicar cuáles de estos nombres comunes son partes de predicados. Finalmente, indicar qué nombres comunes no son partes de predicados pero son utilizados como términos, por ejemplo, «volúmenes» en (5).

1. Luis actúa muy rápidamente.
2. Javier es un hombre a quien le gustan los libros.
3. José ha leído rápidamente.
4. Juana parece estar concentrada.
5. Estos volúmenes son libros de consulta.
6. Su plan se desarrolla perfectamente.
7. Venus es un planeta.
8. Aquel objeto es una estrella distante.
9. Aquella planta es un vegetal.
10. Este reloj funciona continuamente.
11. Este paquete contiene ropa.
12. Su equipaje se envía ahora.
13. Su teléfono está sonando.
14. Pablo es un estudiante de la Universidad.
15. Carlos es un pianista.

E. Cuáles son los *términos* que son el sujeto y no parte del predicado en cada una de las siguientes proposiciones.

1. Dos más dos es igual a tres más uno.
2. Jaime es un jugador de pelota.
3. Susana es una secretaria.
4. María ha esperado pacientemente.
5. $5 \times 6 = 30$.
6. Este pájaro es un pájaro bobo.
7. Esta rosa es una flor fragante.
8. Juana se marcha.
9. Tres es un número primo.
10. Juan habla con claridad.

F. Simbolizar las proposiciones siguientes. Utilizar una letra mayúscula para representar el predicado completo y una letra minúscula para el término.

1. Andrés es un miembro del club.
2. Terry habla bajo.
3. Carlos es un músico.
4. Este pupitre está desordenado.
5. Esta mesa es redonda.

6. La guerra de los Cien Años empezó en 1337.
7. El coche del Sr. Martínez es un coche de carreras.
8. Australia es un continente.
9. Este bloque de bronce tiene una masa de 500 gramos.
10. El cero es un número.
11. El Mercurio es un líquido que se dilata en proporción directa a la temperatura
12. Este dinosaurio vivió durante el período Jurásico.
13. La ciudad rusa de Sebastopol es un puerto en el mar Negro.
14. Este círculo tiene una tangente *AB*.
15. Este libro tiene una página extraviada.

G. En las proposiciones siguientes, dos proposiciones atómicas están unidas por un término de enlace. Simbolizar la proposición completa utilizando letras minúsculas para los términos y letras mayúsculas para los predicados.

1. Si Juana es alta, entonces Susana es baja.

Ejemplo: Sea «T» el predicado «es alta».
«S» el predicado «es baja».

$j =$ Juana
$s =$ Susana.
Entonces $Tj \rightarrow Ss$

2. O Catalina se ha retrasado o Rosa se ha adelantado.
3. Eubola es una isla griega y Creta es una isla griega.
4. Si Tomás es elegido, entonces Jorge será nombrado.
5. Si José es viejo, entonces Juan no es viejo.
6. O el tren se ha retrasado o esta guía está equivocada.
7. Jorge Sand y Jorge Elliot no eran hombres.
8. O el peso específico del helio es menor que el del aire, o el aire no empujará el globo hacia arriba.
9. El budismo es una religión que se originó en la India, pero que tuvo más difusión en la China.
10. Si Antonio está aquí, entonces puede empezar la asamblea.
11. Juan ganará si y sólo si se entrena cada día.
12. Pedro será músico si y sólo si practica con diligencia.

• 5.5 *Fórmulas atómicas y variables*

En Lógica predicativa la expresión más corta que tiene sentido por sí sola es una letra predicativa a la que está unida un término. Por ejemplo,

(1) Lj

que representa la proposición atómica

(2) Jaime estudia Lógica.

Sólo «estudia lógica» no dice nada, ni tampoco «Jaime»; ni tampoco «L» o «j». «L» es sólo un predicado y «j» es sólo un término.

Se considera ahora la expresión

(3) x es un número par,

puede simbolizarse

(4) Ex.

Las *formas* de (3) y (4) son las mismas que las formas de (2) y (1) respectivamente. Pero (3) y (4) no dicen nada sobre algo en particular y no se puede decir si son ciertas o falsas porque x no es ningún objeto particular. Sin embargo, también aprenderemos a manejar expresiones como la (4) de manera análoga a como se hizo con las expresiones del tipo (1), bien sea consideradas independientemente o formando parte de expresiones más largas. Se las llamará fórmulas atómicas.

Si en (3) y (4) se sustituye x por «4» se tiene la proposición atómica cierta «4 es un número par». que se designa por «$E4$». Si se sustituye x por 5 se obtiene una proposición falsa. Se podrían elegir términos cualesquiera que nombrasen o describiesen objetos únicos para poner en vez de x en (3) o (4): 6, $2+8$, Filadelfia, etc. Cada uno daría lugar a una proposición cierta o falsa. Cuando las letras «x», «y», «z», se utilizan como términos, sin que representen objetos particulares, se denominan *variables*. En casos concretos se pueden sustituir por nombres de objetos particulares. Así las variables se consideran también como términos a pesar de no nombrar ni referirse a ningún objeto único. Esta es la razón por la que cuando se introdujeron los términos se indicó que más adelante se daría una definición más completa. Esta definición es:

> Un *término* es una expresión con la que o se nombra o se designa un único objeto, o es una variable que puede ser sustituida por una expresión que nombre o designe un objeto único.

Es natural preguntar a qué corresponden las variables en Gramática. Es claro que no son verbos ni adjetivos ni adverbios ni nombres. Pero en forma muy aproximada se puede decir que las variables corresponden a los pronombres. Considérense las siguientes fórmulas atómicas que contienen variables.

x es un hombre.	$x=y$
y es un astronauta.	$x>1$
z es un libro.	$y>10$
u es una pintura famosa.	$x+y=z$
x es un nuevo automóvil negro.	$x-1=3$

Si se escriben las cinco fórmulas atómicas de la izquierda sustituyendo las variables por pronombres, se tiene:

Él es un hombre.
Él es un astronauta.
Éste es un libro.
Ésta es una pintura famosa.
Éste es un automóvil negro nuevo.

A primera vista, estamos inclinados a decir si son verdaderas o falsas estas proposiciones que utilizan pronombres. Sin embargo, dada la especial naturaleza de los pronombres que los asemeja a las variables, por la simple inspección de las proposiciones en las que se presentan, no se puede decir si las proposiciones son ciertas o falsas. Con sólo la proposición «Él es un hombre» no se sabe a que objeto único se refiere el pronombre «él». Para hallar el objeto único a que se refiere el pronombre se ha de considerar todo el contexto o situación en que se usa la proposición. Sin este contexto no se puede decir si la proposición «Él es un hombre» es cierta o falsa. Las mismas observaciones se aplican a los otros ejemplos.

Ejercicio 5

A. Señalar los pronombres en las proposiciones siguientes.

1. Ella es amiga de Jorge.
2. Éste es un insecto.
3. Él trabaja en el supermercado.
4. Ellos son senadores.
5. Ésta es nuestra canción favorita.
6. Ella es una secretaria.
7. Ella escribe libros.

8. Él es médico.
9. Ésta es una casa grande.
10. Ésta es una planta de flor prematura.

B. En los ejemplos del Ejercicio **A** sustituir los pronombres por variables. Utilizar «*x*» y «*z*» como variables.

Damos ahora una definición concisa de fórmula atómica:

> Una *fórmula atómica* es un predicado solo, junto con el número apropiado de términos unidos al mismo.

Hasta ahora, se han considerado únicamente predicados que sólo requieren un término. Se denominan predicados «simples». Considérese el siguiente:

(1) El Sr. López es el padre de Luis.

Si se pone «*s*» para «El Sr. López» y «*K*» para el predicado simple «es el padre de Luis», entonces (1) se simbolizará por:

$$Ks.$$

Pero si se supone que (1) fuera una premisa y que hubiera otra segunda premisa que dijera:

(2) Todo aquél cuyo padre es el Sr. López tiene el pelo negro.

De (1) y (2) se podría concluir lógicamente que Luis tiene el pelo negro. Pero esto no se puede hacer con la «*K*» que representa el predicado simple «es el padre de Luis». Si se representa por «*F*» el predicado «es el padre de», y por «*j*» el término «Luis», se puede simbolizar (1) por medio de la fórmula atómica:

$$Fsj$$

«*F*» es un predicado doble, pues el número apropiado de términos que hay que añadirle es dos. «*Fs*» y «*Fj*» representarían «El Sr. López es el padre de» y «es el padre de Luis», respectivamente. Ninguna de las dos es completa. No se pueden presentar solas, por tanto, no son fórmulas atómicas.

EJERCICIO 6

A. «*B*» es un predicado simple, «*D*» es un predicado doble y «*G*» es un predicado triple. En cada uno de los casos siguientes, indicar si es o no una fórmula atómica.

1. Ba
2. $\neg Dde$
3. $Bx \rightarrow$
4. Dxy
5. $Gabc$
6. $Dae \vee$ P
7. Dcy
8. $Gxyz$
9. $\leftrightarrow$
10. Bc & Dab
11. $Gaxy$
12. Bz

B. Establecer cinco fórmulas atómicas utilizando las variables «x», «y», y «z».

C. ¿Cuáles de las siguientes son fórmulas atómicas?

1. $x=y$.
2. $z<x$.
3. $x=y$ y $y-1=z$.
4. $x+1=y+1$.
5. $x+y=y+w$.
6. Si $z<x$ entonces $z<y$.
7. Si $z<x$ entonces $y>z$.
8. $x+y>z$.
9. Si $y-1=z$ entonces $x-1=z$.
10. O $x>y$ o $z>x$.
11. $x \neq z$.
12. $x+z=y+z$.
13. $x-w \neq y+z$.
14. $x>w$ y $y<z$.
15. $x=y \rightarrow z \neq y+1$.
16. $x=2\times 2$.
17. $y=2+2$.
18. $x=3+1$ y $y \neq 3+1$.
19. $x>1$.
20. $z>2$.

El conocimiento de las variables y fórmulas atómicas permite dar una forma clara de traducción del lenguaje corriente al simbolismo de la Lógica predicativa. Se considera el ejemplo,

Eisenhower nombró ministro de Justicia a Warren.

$Axy \leftrightarrow x$ nombró a y.
$e=$ Eisenhower.
$w=$ministro de Justicia a Warren.

En símbolos: Aew.

Cuando utilicemos equivalencias como la «$Axy \leftrightarrow x$ nombró a y», siempre que se tenga «nombró a» en castellano se utilizará «A» en símbolos, y siempre que se tenga «A» en símbolos se dirá «nombró a» en castellano.

«x» y «y» se han utilizado para indicar que «nombró a» y «A» son predicados dobles que requieren dos términos. Los términos «e» y «w» no se utilizan para traducir «nombró a», pues la traducción de cada término y cada predicado han de darse por separado para que quede claro. Separadamente damos las traducciones de «Eisenhower», de «ministro de Justicia a Warren» y de «nombró a», pero no de «Eisenhower nombró ministro de Justicia a Warren» de una vez.

Obsérvese lo siguiente. (1) Los símbolos para términos y para predicados se dan por separado. (2) El número de términos apropiados al predicado se indica añadiendo al predicado un número de variables igual al de términos. Por lo tanto, la traducción de un predicado es un símbolo que corresponde al predicado del lenguaje ordinario, y que forma parte de una fórmula atómica, en este caso «Axy». (3) Es importante el orden en que se escriben los términos unidos a predicados no simples. (4) Entre la fórmula atómica en símbolos lógicos y su equivalente en el lenguaje ordinario se coloca un término de enlace de equivalencia $\leftrightarrow$. (5) El signo igual, $=$, se coloca entre los símbolos lógicos para términos que representan objetos aislados y los nombres correspondientes en lenguaje corriente de los mismos objetos. (6) Los símbolos lógicos se ponen a la izquierda, las palabras en castellano a la derecha.

En lo sucesivo se seguirá siempre esta pauta al efectuar traducciones. La operación de indicar los símbolos lógicos que se utilizarán para proposiciones atómicas para los predicados, o términos, puede decirse que es ***definir los términos.***

Es aceptable también el escribir «xAy» en vez de «Axy». Así, la proposición atómica anterior, «Aew», podría también simbolizarse «eAw». En ambos casos el orden de los dos términos ha de ser el mismo.

Ejercicio 7

Traducir las siguientes proposiciones a la forma total de lógica predicativa, definiendo primero los símbolos y dando después la traducción.

1. El monumento a Washington mide 170 m de altura.
2. Aristóteles fue el maestro de Alejandro Magno.
3. El Senado tiene cien miembros.
4. Lindbergh hizo el primer vuelo solo hacia París.
5. Fujiyama es una montaña muy bonita.
6. La cascada más alta en el Parque de Yosemite mide 770 metros.
7. Los Estados Unidos reciben mucho café del Brasil.
8. El puente de Golden Gate es rojo.
9. El sistema de los números reales es un cuerpo.

10. El triángulo ABC es congruente al triángulo DEF.

Fórmulas atómicas cuyos términos no utilizan variables son proposiciones atómicas. Con términos de enlace forman proposiciones moleculares igual que en Lógica proposicional. Fórmulas atómicas con variables también pueden combinarse con términos de enlace, pero los resultados no son proposiciones ciertas o falsas. En Lógica predicativa, expresiones que contienen términos de enlace se denominan fórmulas moleculares tanto si contienen variables como si no.

Considérense los ejemplos siguientes:

Ejemplo a.

Si Miguel Ángel fue un artista del Renacimiento, entonces
Leonardo da Vinci fue un artista del Renacimiento.

$Rx \leftrightarrow x$ fue un artista del Renacimiento
$m =$ Miguel Ángel
$l =$ Leonardo da Vinci

en símbolos: $Rm \rightarrow Rl$

Ejemplo b.

Antonio ayuda a Juan y es ayudado por José.

$Hxy \leftrightarrow x$ ayuda a y
$b =$ Antonio
$h =$ Juan
$j =$ José

en símbolos: $Hbh \;\&\; Hjb$

Obsérvese que el segundo miembro de la conjunción, «Antonio es ayudado por José» se ha tratado igual que «José ayuda a Antonio».

Ejemplo c.

Si x es mayor que dos y dos es mayor que z, entonces
x es mayor que z.

Esto se puede simbolizar utilizando los símbolos típicos matemáticos y lógicos. En este caso no es necesario definir los símbolos. Podemos escribir inmediatamente la fórmula molecular

$$x>2 \quad \& \quad 2>z \quad \rightarrow \quad x>z$$

Ejercicio 8

A. Indicar cuáles de las siguientes proposiciones se traducirían sólo como fórmulas atómicas y cuáles se traducirían como fórmulas moleculares.

1. Los ingresos de Álvarez crecen y los precios de los bienes de consumo aumentan.
2. Si los ingresos de Álvarez no aumentan proporcionalmente, entonces sus ingresos reales disminuyen.
3. *y* es el índice de precios durante el mes.
4. O los ingresos reales aumentan o el nivel de vida no ha de subir.
5. *x* viaja hacia el Norte.
6. *x* dista 1000 millas de *z*.
7. *z* viaja a razón de 300 millas por día.
8. 5/6 no pertenece al conjunto de los números enteros.
9. *x* es un número entero.
10. *z* no es un número racional.
11. Juan no es un licenciado.
12. La Luna es el único satélite natural de la Tierra.
13. *z* es el número de alumnos de la escuela.
14. Luis tira con una fuerza de 20 kg y Antonio tira por el otro lado con una fuerza de 25 kg.
15. *y* es la magnitud de la fuerza resultante.

B. Dar una traducción predicativa de cada una de las siguientes proposiciones, definiendo primero sus símbolos.

1. Si el Nautilus está en equilibrio, o está en reposo, o se mueve con velocidad constante en línea recta.
2. Marta ama a José y José ama a Marta.
3. O el Sr. Gómez lleva a Pedro en el coche o llegará tarde a la cita.
4. Si se sobrepasa el límite elástico del muelle, entonces sus fuerzas moleculares son vencidas y el muelle no vuelve a su forma original.
5. Si Juan no es el hermano de María o María no es la cuñada de Juan, entonces el Sr. Pérez no es el padre de José y José es el primo de María.

• 5.6 *Cuantificadores universales*

Consideremos la fórmula atómica:

$$x \text{ es alto.}$$

Si se sustituye «x» por «Lincoln» se obtiene la proposición cierta «Lincoln es alto». Si se examinan las fórmulas atómicas dadas como ejemplo en la última sección, se puede ver en cada caso que si se sustituyen las variables «x», «y» y «z» por términos que se refieran a un objeto único se obtiene una proposición atómica que es o cierta o falsa.

¿Hay algún otro camino para transformar fórmulas atómicas en proposiciones ciertas o falsas? La respuesta es afirmativa. En vez de poner «Lincoln» para «x» se puede decir «Todo es alto». Ésta es una proposición gramatical falsa. En vez de escribir «Todo es alto» se puede escribir la proposición «Cada x es alto». En Lógica se acostumbra a expresar la proposición en esta forma:

$$\text{Para cada } x,\ x \text{ es alto.}$$

La frase «Para cada x» es un *cuantificador universal.* Se denomina cuantificador universal porque utiliza la variable «x» para afirmar que cada cosa en el universo tiene una cierta propiedad; en el caso presente la propiedad de ser alto.

Otro ejemplo a considerar es la fórmula atómica aritmética.

$$x > 0.$$

Se puede hacer esta fórmula cierta o falsa sustituyendo «x» por el nombre o descripción de algún número particular. Por ejemplo, si se sustituye «x» por «$1+1$», se obtiene la proposición atómica

$$1+1>0,$$

que es cierta. Si se sustituye «x» por «-3», se obtiene la proposición atómica falsa,

$$-3>0.$$

Si se añade un cuantificador universal a la fórmula atómica «$x>0$», se obtiene la proposición falsa,

$$\text{Para cada } x,\ x>0.$$

Esta proposición es falsa, por ejemplo, si $x = -1$, entonces x no es mayor que 0. Es decir, la proposición afirma que *cada* número es mayor que 0, pero el número -1 no lo es, y por tanto la proposición es falsa.

El símbolo para el cuantificador universal es una «A» al revés, y se simboliza la última proposición considerada por:

$$(\forall x)(x>0).$$

Existe en el lenguaje otra forma de expresar lo mismo. En vez de decir «Para cada x, $x>5$» se puede decir:

Para *todo* x, $x>5$.

En ambos casos se simboliza de la forma:

$$(\forall x)(x>5).$$

Desde el punto de vista lógico la frase «Para cada x» se usa en el mismo sentido que la frase «Para todo x». El cambio de «cada» a «todo», representa en el lenguaje usual el cambio de singular a plural, pero éste es un cambio superficial análogo a uno que se había observado antes para los nombres comunes. No se trata de un cambio lógico. «Todos los gatos tienen garras» se traduce de la misma forma que «Cada gato tiene garras».

La frase «cada uno» también es una expresión común para indicar una cuantificación universal. En lenguaje corriente, en vez de decir «Para cada x, x es sabio», se diría «Cada uno es sabio». La traducción sería

$Wx \leftrightarrow x$ es sabio.

En símbolos $(\forall x)(Wx)$.

La lista siguiente resume las expresiones más comúnmente utilizadas para expresar el cuantificador universal:

Para cada x . . . .
Cada . . . .
Para todo x . . . .
Todo . . . .
Cualquiera . . . .

Obsérvese que en las proposiciones «Para cada x, x es 0» y «Para cada x, $x>5$» se da por supuesto que x es un número. El cuantificador universal en estos casos no se refiere a todas las cosas o entes, sino sólo a todos los números. Con frecuencia interesan no todas las cosas en el universo, sino un conjunto definido de cosas. En los ejemplos que se acaban de dar se consideran fórmulas de Aritmética y por tanto se refieren sólo a conjuntos de números. El conjunto de cosas que se consideran en una discusión se denomina *dominio de referencia.* Así, en algunos ejemplos se restringe el dominio a un conjunto particular y entonces el cuantificador universal se refiere a cada elemento de este conjunto. En otros ejemplos no se restringe el dominio, sino que se deja al cuantificador universal que cubra todos los entes u objetos del universo.

Casi siempre el contexto de la discusión pone de manifiesto el dominio. Por ejemplo, el uso de símbolos matemáticos en muchos de los ejemplos indicará que el dominio es el conjunto de los números. Así, el cuantificador universal «Para cada x» significa que se afirma algo para cada elemento en aquel dominio (en otras palabras, para cada número). Algunas veces una expresión particular del lenguaje utilizada para expresar la cuantificación universal indica ya el dominio. Las palabras «cada uno» o «cada cual», por ejemplo, sugieren que el dominio de los individuos es el de los seres humanos. En estos casos, el cuantificador universal «para cada x» se refiere a cada ser humano.

En cada proposición nos podemos limitar a un dominio particular. En una proposición tal como «Para cada x, $x>0$» se ha de entender que el dominio está restringido al conjunto de los números. Si el dominio no fuera restringido, la proposición se tendría que expresar en la forma condicional «Para cada x, si x es un número entonces $x>0$». En una discusión particular, como en los ejemplos de Aritmética, es mucho más conveniente limitarse a un dominio restringido puesto que el sujeto de esta discusión está limitado a un dominio fijo como el conjunto de los números.

EJERCICIO 9

A. Convertir cada una de las fórmulas atómicas en una proposición atómica cierta o falsa sustituyendo las variables por nombres o descripciones de objetos únicos. Decir cuando la proposición resultante es cierta o falsa.

1. x es un senador de los Estados Unidos.
2. x es un maestro.
3. y es un buen libro.
4. x es un número mayor que 4.
5. x es una persona simpática.
6. z es el mejor logista en esta clase.
7. z juega a pelota.
8. y es una flor.
9. x es el primero de la escuela.
10. x es un astronauta.
11. z es un Secretario de Estado.
12. y es un Rey.

13. x es la fecha de mi cumpleaños.
14. y firma todos los billetes de Banco.
15. z es un miembro del Gobierno.

B. Convertir las fórmulas atómicas del Ejercicio **A** en proposiciones ciertas o falsas añadiendo cuantificadores universales utilizando el símbolo lógico $\forall$. Para cada una de las proposiciones resultantes decir si es cierta o falsa.

Ciertas expresiones de cuantificación universal se utilizan para expresar simultáneamente una negación. Considérese el ejemplo,

Ninguno quiere setas venenosas.

La palabra «Ninguno» tiene una doble acción como cuantificador universal y como expresión de la negación. Utilizando la variable «x», se puede traducir la expresión.

Para todo x, x no quiere setas venenosas.

o

$(\forall x)$(x no quiere setas venenosas).

El sentido en que «Ninguno» en la proposición original expresa una cuantificación universal, queda de manifiesto ahora por la frase «Todo x», y el sentido en que la palabra «Ninguno» en la proposición original expresa negación, está ahora indicada por la palabra «no». Para simbolizar completamente la proposición traducida, se define primero,

$Lx \quad \leftrightarrow \quad x$ quiere setas venenosas,

y entonces se simboliza la proposición por

$$(\forall x)(\neg Lx).$$

Otra expresión que expresa ambas, cuantificación universal y negación, se pone de manifiesto en la proposición siguiente:

Nada es absolutamente malo.

En esta proposición la palabra «Nada» sirve a la vez como cuantificador universal y como expresión de una negación, lo que se pone refiere claramente cuando se introduce una variable a la expresión en castellano; en primer lugar se tiene:

Para todo x, x no es absolutamente malo.

Definiendo:

$$Bx \quad \leftrightarrow \quad x \text{ es absolutamente malo.}$$

La proposición se simboliza por:

$$(\forall x)(\neg Bx)$$

La siguiente lista resume las expresiones más comunes utilizadas para expresar a la vez un cuantificador universal y una negación:

Para ningún x . . . .
Ninguno . . . .
Nadie . . . .
Nada . . . .
No . . . .

Ejercicio 10

A. Utilizar el cuantificador universal para simbolizar las siguientes proposiciones, pero sin utilizar letras que sustituyan a los predicados; expresar las negaciones y predicados en castellano con variables.

1. Para cada x, x tiene un nombre.
2. Cada cosa está sujeta a cambio.
3. Para todo x, x es el valor de una variable.
4. Nada es absolutamente frío.
5. Para cada y, y pertenece a un conjunto.
6. Nada cambia.
7. Para todo y, y no es perfecto.
8. Todas las cosas son átomos.
9. Para cada y, y es materia.
10. Para todo y, y es una idea.

B. En cada una de las proposiciones siguientes el dominio de referencia es el conjunto de números. Usar el cuantificador universal para simbolizar las proposiciones pero no utilizar letras sustituyendo a los predicados. Expresar las negaciones y predicados con variables en símbolos matemáticos típicos o en el lenguaje usual.

1. Para cada z, $z > 0$.
2. Para cada x, $x < x + 1$.
3. Para cada x, x no es divisible por 0.

4. Para cada w, $w+0=w$.
5. Para todo x, x no es mayor que x.

C. En cada una de las proposiciones siguientes el dominio de referencia es el conjunto de los seres humanos. Usar el cuantificador universal para simbolizar las proposiciones, pero no utilizar letras para los predicados. Expresar las negaciones y predicados en el lenguaje corriente con variables.

1. Nadie acepta con alegría un desastre.
2. Nadie oye aquellos sonidos.
3. A nadie le gusta no tener razón.
4. Nadie es perfecto.
5. Cada uno necesita un mínimo de alimentos.

Es necesario distinguir los casos en que una negación sigue al cuantificador, de los casos en que la negación precede al cuantificador. Considérese la proposición siguiente.

(1) No todas las cosas son bonitas.

Ésta es simplemente la negación de

(2) Todas las cosas son bonitas.

Definiendo: $Bx \leftrightarrow x$ son bonitas, la proposición (2) se simboliza

$$(\forall x)(Bx)$$

y (1) es la negación de ésta

$$\neg(\forall x)(Bx).$$

El lenguaje a veces no es tan preciso como el simbolismo lógico. Hay muchas maneras distintas de expresar una idea. Muchas formas distintas en el lenguaje usual pueden tener un mismo significado. Por otra parte, una proposición en castellano puede tener diversos significados. Por ejemplo, el lugar que ocupa «no» en una proposición no siempre indica qué es lo que se ha de negar al simbolizarla. Considérese

(3) Cada uno no es un tonto.

Al principio parece que lo que se niega es «ser un tonto». Por medio de las variables, la frase sería:

Para cada x, x no es un tonto,

que significa:

(4) Nadie es un tonto.

Definiendo: $Fx \leftrightarrow x$ es un tonto, en símbolos la proposición sería:

$$(5)\ (\forall x)(\neg Fx).$$

Pero si significa:

(6) No cada uno es un tonto,

por medio de variables sería:

No para cada x, x es un tonto,

o en símbolos

$$(7)\ \neg(\forall x)(Fx).$$

La proposición es ambigua y es necesario considerar qué significado tiene la proposición en cada contexto. Por otra parte, la elección de las formas de expresión (6) o (4) son mejores, porque el significado lógico es claro. En la proposición (6) la proposición atómica completa «Cada uno es un tonto» es negada. En la proposición (4) la fórmula «Fx» es negada.

EJERCICIO 11

A. Traducir completamente en el simbolismo de la Lógica predicativa todos los ejemplos del Ejercicio 10 (A, B y C). En el Ejercicio 10 se añadió el cuantificador universal. Complétese ahora la simbolización utilizando letras que sustituyan los predicados y añadiendo los símbolos de negación apropiados.

B. Hacer la traducción completa en los símbolos de la Lógica predicativa. Primeramente se pueden introducir variables en las proposiciones escritas en castellano, si no estuvieran ya, sin embargo, no es necesario escribir este paso. En algunos de los ejemplos es obvio que el dominio de referencia es restringido. En cada ejemplo, en el que el dominio es restringido, indicar este dominio.

Ejemplo:	Cada cosa es buena.
Introduciendo variables:	Para todo x, x es bueno.
Definiendo los símbolos:	$Gx \leftrightarrow x$ es bueno.
En símbolos	$(\forall x)(Gx)$

1. Para cada z, z es vivo.
2. Cada uno desea buena suerte.
3. Para todo x, $x > x - 1$.
4. Todo el mundo no es diestro.
5. Para cada y, $y = y$.
6. Para cada z, z es un número.
7. Nada es imposible.
8. A nadie le gusta la derrota.
9. Para todo x, x no es absolutamente estable.
10. No todas las cosas son dignas de luchar por ellas.
11. Nadie es omnisciente.
12. Todas las cosas tienen valor.
13. Para cada x, x es sabio.
14. Para todo y, y es tonto.
15. Todo el mundo no tiene dos buenos ojos.
16. Todo es relativo.
17. Para cada w, w es un hombre.
18. Todo tiene su historia.

• 5.7 *Dos formas típicas*

Se vuelve ahora a la simbolización de cierta clase de proposiciones típicas que se presentan repetidamente en razonamientos deductivos o en otros contextos científicos. Cada una de estas proposiciones utiliza un cuantificador universal.

Para empezar, consideramos la proposición,

(1) Cada hombre es un animal.

De acuerdo con la discusión previa sobre nombres comunes y predicados, desde el punto de vista lógico hay dos nombres comunes. Ninguno de ellos se usa para construir un término y, por tanto, hay dos predicados en esta proposición, que son, el predicado «es un hombre», y el predicado «es un animal». Se utilizan estos dos predicados para traducir la proposición en la forma

(2) Para cada x, si x es un hombre, x es un animal.

Lo importante e interesante en lo que se refiere a la traducción tanto de (1) como (2), es que, en Lógica proposicional (1) se traduciría como una proposición atómica, mientras que (2) utiliza el término de enlace proposicional «si... entonces...». El motivo de este cambio es: si los nombres comunes han de ser tratados como predicados, entonces proposiciones como (1) no pueden ser traducidas como fórmulas atómicas, pues una fórmula atómica sólo puede tener un predicado exactamente. Utilizando nombres comunes como tales nombres y no como predicados completos, (1) expresa una relación entre hombres y animales en la forma de una proposición atómica. Cuando esta relación ha de ser expresada por predicados completos de manera que se pueda simbolizar, es necesario utilizar un término de enlace proposicional para expresarla. Esto es lo que se hace en la proposición (2).

Es de capital importancia hacer notar que el único término de enlace proposicional que puede usar en (2) es el «si... entonces...». Supongamos, por ejemplo, que en vez de utilizar el «si... entonces...» como término de enlace proposicional, se utiliza el «y». Entonces la proposición (1) se traduciría por la proposición:

(3) Para cada *x, x* es un hombre y *x* es un animal.

Es manifiesto que el significado de (3) es distinto del significado de (1). ¿En qué difieren los significados de los dos ejemplos? La proposición (3) dice que cada cosa es a la vez un hombre, *y* un animal, y esta proposición es evidentemente falsa. No es difícil encontrar ejemplos que hagan (3) falsa. Por ejemplo, la página en la que se leen estas proposiciones no es ni un hombre ni un animal, en contra de lo que afirma la proposición (3). La proposición (1), por otra parte, indica simplemente que para cualquier cosa se puede pensar que *si* es un hombre entonces ha de ser también un animal. En lenguaje corriente esto significa lo mismo que la proposición cierta «Cada hombre es un animal».

Definiendo, $Mx \leftrightarrow$ x es un hombre, $Ax \leftrightarrow$ x es un animal, y también utilizando el signo $\rightarrow$ y el símbolo para el cuantificador universal, se puede simbolizar (1) y (2),

$$(4)\ (\forall x)(Mx \rightarrow Ax).$$

La proposición (4) es un ejemplo típico de proposiciones de la forma «Cada tal-y-tal es esto-y-esto».

Puesto que lógicamente «cada» y «todo» tienen la misma fuerza, también será un ejemplo de proposiciones de la forma «Todo tal-y-tal es esto-y-esto». Desde el punto de vista lógico, se podría sustituir (1) por la proposición:

Todos los hombres son animales,

sin cambiar la fuerza lógica de lo que se había dicho. Obsérvese que el cambio en Gramática del verbo singular al plural no tiene en este caso importancia lógica.

Se considera ahora el caso en que se tiene a la vez cuantificación universal y negación. Un ejemplo típico es la proposición siguiente:

(5) Ningún hombre es inmortal.

Introduciendo variables se tiene:

(6) Para todo x, si x es un hombre, entonces x es no inmortal,

y (6) se traduce en símbolos por:

(7) $(\forall x)(Mx \rightarrow \neg Ix)$,

donde $Ix \leftrightarrow x$ es inmortal.

La proposición (7) es, pues, un ejemplo de proposiciones de la forma: «Ningún tal-y-tal es esto-y-esto» o expresado en plural «Ningunos tales-y-tales son estos-y-estos».

En algunos casos se niega una proposición completa como la (4). Sea la proposición

(8) No toda mujer tiene el pelo largo.

Definiendo

$Wx \leftrightarrow x$ es una mujer
$Lx \leftrightarrow x$ tiene pelo largo.

La proposición (8) se simboliza por

$$\neg(\forall x)(Wx \rightarrow Lx).$$

Hay muchas maneras de expresar en castellano una misma cosa y es imposible dar una forma típica para cada una de ellas. Es a menudo necesario considerar exactamente lo que dice, o intentar decir la misma cosa de manera diferente, hasta encontrar una forma en la que se pueda reconocer claramente una estructura lógica. Si se llega a la forma condicional, «si... entonces...» la estructura es casi siempre la más clara. Considérese el ejemplo:

$$(\forall x)(Tx \rightarrow Px)$$

Definiendo:

$Tx \leftrightarrow x$ es un árbol
$Px \leftrightarrow x$ es una planta

cada una de las siguientes son formas distintas de enunciar la misma proposición lógica anterior:

> Todo árbol es una planta.
> Las cosas que son árboles son también plantas.
> Sólo plantas son los árboles.
> Nada es un árbol si no es una planta.
> Si algo es un árbol entonces es una planta.

Resumiendo, proposiciones de la forma «Todo A's son B's» se simboliza en la forma

$$(\forall x)(Ax \rightarrow Bx).$$

Proposiciones de la forma «Ninguna A's son B's» se simboliza en la forma

$$(\forall x)(Ax \rightarrow \neg Bx).$$

Ejercicio 12

A. Simbolizar completamente:

1. Todos los gorriones son pájaros.
2. Todos los pinos son siempre verdes.
3. Toda almeja es bivalva.
4. Todos los franceses son europeos.
5. Cada millonario tiene riquezas.
6. Todo fruto es delicioso.
7. Toda hierba es verde.
8. Todo hielo es frío.
9. Todo río corre hacia abajo.
10. Todos los caballos son cuadrúpedos.

B. Simbolizar completamente:

1. Ningún melocotón es un vegetal.
2. Ningún limón es dulce.
3. Ningún hombre es una isla.
4. Ningún gato es canino.
5. Ningún adulto es un menor.
6. Ninguna zorra es tonta.

7. Ningún tirano es un hombre justo.
8. Ningún pájaro es cuadrúpedo.
9. Ningún universitario es un infante.
10. Ningún cuento de hadas es una historia cierta.

C. Simbolizar completamente:

1. Ningún canino es pájaro.
2. Ninguna lapa es bivalva.
3. Ningún automóvil es un cohete.
4. Ningún payaso es un hombre feliz.
5. Todos los guantes tienen dedos.
6. Todos los estudiantes son escolares.
7. Ningún cocinero es hombre delgado.
8. Todas las cuevas son refugios.
9. Ninguna tortuga es corredora.

D. Simbolizar completamente las proposiciones siguientes. Obsérvese que «sólo» es otra expresión común para indicar un cuantificador universal.

1. Sólo el protoplasma es sustancia viviente.
2. Sólo los hombres son racionales.
3. Sólo europeos son franceses.
4. Todos los pájaros y peces son animales.
5. Todos los caballos y vacas son cuadrúpedos.
6. Todos los plátanos y robles son árboles.
7. No todos los hombres son inteligentes.
8. No todos los hombres son rectos.
9. No toda la hierba es verde.

E. Simbolizar los cuantificadores y términos de enlace proposicionales, pero dejar los símbolos matemáticos.

1. Para todo x, si $x>2$, entonces $x>1$.
2. Para todo x, $x+0=x$.
3. Para todo x, si $x\neq 0$, entonces $x/x=1$.
4. Para todo y, $y-y=0$.
5. Para todo y, $y-0=y$.

Examen de repaso

I. Hacer una lista de los términos en las proposiciones siguientes, y una con los predicados de cada una.

a. Mike Taylor es un futbolista.
b. $5^2=25$.
c. El gran oso negro se dirigía despacio hacia nosotros.
d. Lincoln fue el décimosexto presidente de los Estados Unidos.
e. Dos es la raíz cúbica de ocho.

II. Simbolizar completamente:

a. Uno es el recíproco de uno.
b. La Enmienda dieciséis permite los impuestos federales.
c. El Procurador General es nombrado.
d. Aquel libro es una biografía.
e. Este libro es una colección de ensayos.
f. El sistema de los números naturales tiene un elemento cero.
g. La Sra. Costello es la madre de Daniel.
h. Los senadores no fueron elegidos por voto directo antes de 1913.
i. Si Eduardo no es un miembro del Consejo, entonces Nicolás no es un miembro del Consejo.
j. O $2+2\neq5$ o $2+3\neq6$.
k. Rosa es presidente y Teresa es tesorera.
l. Los «Gigantes» ganarán si y sólo si Jorge puede jugar.

III. Llenar cada espacio con una sola palabra.

a. Variables corresponden a .... en Gamática.
b. Una fórmula atómica puede contener ....
c. Proposiciones atómicas no contienen ....

IV. Construir cinco fórmulas atómicas utilizando variables.

V. Transformar las proposiciones siguientes en proposiciones *ciertas* sustituyendo las variables por términos.

a. x no está en esta clase.
b. y es un número menor que diez.
c. z es el Gobernador de este Estado.
d. x no es un número positivo.
e. y no es el principal de esta escuela.

VI. Simbolizar completamente las proposiciones siguientes:

a. Para todo *y*, *y* igual a *y* y *y* no es mayor que *y*.
b. Todo ha sido dicho.
c. Ningún hombre es a la vez loco y cuerdo.
d. Ningún número es a la vez par e impar.
e. Todo hombre es mortal.
f. A todo el mundo gusta el circo.
g. Nadie es o totalmente juicioso o totalmente estúpido.
h. Todo es o inmutable o mutable.
i. Para todo *x*, *x* es positivo si y sólo si *x* es mayor que cero.
j. Ninguna música es ruido.
k. Sólo los números positivos son mayores que cero.
l. No todos los números son positivos.
m. Ninguna cosa es a la vez redonda y cuadrada.

CAPITULO 6

ESPECIFICACIÓN UNIVERSAL Y LEYES DE IDENTIDAD

• 6.1 *Un cuantificador*

Sin el armazón de la inferencia proposicional no se podría ver que es válida la inferencia siguiente:

> Cada ciudadano de California es un ciudadano de los Estados Unidos.
> El gobernador Brown es un ciudadano de California.
> Por tanto, el gobernador Brown es un ciudadano de los Estados Unidos.

Hemos agregado al conjunto de instrumentos lógicos la notación para los cuantificadores universales. Veamos lo que se puede hacer al simbolizar las proposiciones de este razonamiento en la nueva notación de cuantificación, añadiendo luego a las reglas de inferencia una regla de supresión de los cuantificadores universales. Estos nuevos métodos permiten analizar y utilizar la estructura detallada de las proposiciones en el razonamiento.

Definiendo: $Cx \leftrightarrow x$ es un ciudadano de California, y $Ux \leftrightarrow x$ es un ciudadano de los Estados Unidos, y b – gobernador Brown, se pueden simbolizar las premisas y la conclusión de este razonamiento por

Demostrar: Ub
(1) $(\forall x)(Cx \rightarrow Ux)$
(2) Cb

Esta simbolización es el primer paso en la estrategia de la demostración. El segundo paso es precisar algún objeto particular para sustituirlo en vez de x. La idea *intuitiva* de especificación es que cualquier cosa que sea cierta para todo objeto, es cierta para cualquier objeto que nosotros deseemos elegir, por ejemplo, el gobernador Brown.

Una vez ha desaparecido el cuantificador, se está en situación de aplicar simplemente los métodos de deducción proposicional desarrollados en el Capítulo 2. La estrategia en tres pasos que se sigue es:

Paso 1. Simbolización de premisas.
Paso 2. Especificación de objetos para eliminar cuantificadores.
Paso 3. Aplicar métodos de inferencia proposicional para deducir una conclusión.

Obsérvese en la demostración siguiente que ejecutando el paso 2 se cambian las fórmulas atómicas, «Cx» y «Ux», en proposiciones atómicas. Esta es la razón por la que se puede dar el paso 3.

Siguiendo ahora los tres pasos en el ejemplo anterior, se obtiene la deducción:

(1) $(\forall x)(Cx \rightarrow Ux)$	P
(2) Cb	P
(3) $Cb \rightarrow Ub$	Especificar b para x.
(4) Ub	PP 2, 3.

La regla que permite especificar se denomina la regla de *especificación universal* Se puede prescindir del cuantificador y sustituir su variable por *cualquier* término; por lo tanto se *especifica* la variable al sustituirla por el individuo que se elija. La idea es que cada proposición que es cierta para *todo,* ha de ser cierta para cualquier individuo específico que se pueda elegir.* De la afirmación universal de que algo es cierto para todas las cosas que podamos elegir, inferimos que la afirmación es cierta para una o varias cosas específicas y determinadas que elijamos.

Como segundo ejemplo se puede considerar un razonamiento simple sobre números.

Cada número positivo es mayor que cero.
1 es un número positivo.
3 es un número positivo.
Por tanto, 1 y 3 son mayores que 0.

* Más adelante se impondrá una restricción necesaria para la especificación universal.

Se define: $Px \leftrightarrow x$ es un número positivo. Entonces utilizando el símbolo ordinario $>$ para «mayor que» y las cifras arábigas como nombres de los números uno y tres, se puede simbolizar el razonamiento,

Demostrar: $1>0 \;\; \& \;\; 3>0$
(1) $(\forall x)(Px \rightarrow x>0)$
(2) $P\ 1$
(3) $P\ 3$

La aplicación de la especificación universal para escribir una deducción de este razonamiento es simple y fácil.

(1)	$(\forall x)(Px \rightarrow x>0)$	P
(2)	$P\ 1$	P
(3)	$P\ 3$	P
(4)	$P\ 1 \rightarrow 1>0$	$1/x$ 1
(5)	$1>0$	PP 2, 4
(6)	$P\ 3 \rightarrow 3>0$	$3/x$ 1
(7)	$3>0$	PP 3, 6
(8)	$1>0 \;\; \& \;\; 3>0$	A 5, 7

Obsérvese que en las líneas (4) y (6) se ha indicado explícitamente la especificación por «$1/x$» y «$3/x$» seguidas del número de la línea a la que se aplicó la especificación universal. En el futuro se utilizará esta línea inclinada para indicar la especificación. Se lee, «Poniendo 1 en vez de x» y «Poniendo 3 en vez de x», y se entiende que se aplica la regla de especificación universal (US). Obsérvese que a la línea (1) se le pueden aplicar dos especificaciones universales distintas. No existe limitación del número de veces que pueden aplicarse especificaciones a la misma proposición universal, de la misma manera que no existe limitación del número de veces que cada línea de una deducción puede utilizarse para deducir nuevas líneas.

EJERCICIO 1

A. Simbolizar las siguientes premisas y conclusiones. Cada ejemplo incluye un término. Utilizar letras minúsculas para simbolizar términos.

1. Todos los perros son animales.
   Lassie es un perro.
   Por tanto, Lassie es un animal.

2. Ningún presidente de los Estados Unidos fue un inmigrante.
   John Quincy Adams fue un presidente de los Estados Unidos.
   Por tanto, John Quincy Adams no fue un inmigrante.
3. Cada número par es divisible por dos.
   Diez es un número par.
   Ocho es un número par.
   Por tanto, ocho y diez son divisibles por dos.
4. Ningún número es mayor que el mismo.
   Tres es un número.
   Por tanto, tres no es mayor que tres.
5. Para cada *x*, si *x* es un número, entonces *x* más uno es mayor que *x*.
   Cuatro es un número.
   Por tanto, cuatro más uno es mayor que cuatro.
6. Todos los loros son pájaros.
   Todos los pájaros son vertebrados.
   Polly es un loro.
   Por tanto, Polly es un vertebrado.
7. Ninguna fracción es un entero.
   Cuatro es un entero.
   Por tanto, cuatro no es una fracción.
8. Todos los números negativos son menores que cero.
   Seis no es menor que cero.
   Por tanto, seis no es un número negativo.
9. Todo presidente es un Jefe de Estado nombrado por elección.
   Un Jefe de Estado no nombrado por elección es un monarca.
   El rey Balduino es un monarca.
   Por tanto, el rey Balduino no es un presidente.
10. Ningún número impar es divisible por dos.
    Seis es divisible por dos.
    Ocho es divisible por dos.
    Por tanto, ni seis ni ocho son números impares.
11. Todos los congresistas son o profesores o miembros de la Academia.
    El Sr. López trabaja en Madrid, pero no es miembro de la Academia.
    Por tanto, si el Sr. López es congresista es un profesor.

B. Dar una deducción completa de los ejemplos de inferencia válida del Ejercicio **A.**

C. En cada uno de los siguientes, deducir la conclusión de las premisas dadas, utilizando la forma típica completa para las demostraciones.

1. Deducir: Pb

   (1) $(\forall x)(Px \quad \& \quad Rx)$

2. Deducir: $Ft \ \& \ Fr$
   (1) $(\forall y)(Gy \ \& \ Fy)$

3. Deducir: Ga
   (1) $(\forall x)(Hx \rightarrow Gx)$
   (2) Ha

4. Deducir: Fd
   (1) $(\forall y)(Fy \leftrightarrow Hy)$
   (2) Hd

5. Deducir: $2>0$
   (1) $(\forall x)(x>1 \rightarrow x>0)$
   (2) $2>1$

6. Deducir: $3>0 \ \& \ 4>0$
   (1) $3>1$
   (2) $(\forall y)(y>1 \rightarrow y>0)$
   (3) $4>1$

7. Deducir: $\neg Hf$
   (1) $(\forall x)(Hx \rightarrow Rx)$
   (2) $\neg Rf$

8. Deducir: Gb
   (1) $(\forall x)(Gx \lor Jx)$
   (2) $\neg Jb$

9. Deducir: Jb
   (1) $\neg Hb$
   (2) $(\forall y)(\neg Jy \rightarrow Hy)$

10. Deducir: Hx
   (1) $(\forall x)(Gx \rightarrow Jx \ \& \ Hx)$
   (2) Gx

Se puede también aplicar la especificación universal para hacer inferencias en las que números u otros objetos estén representados por términos complejos como «$1+1$» o «$5+1$» en vez de los simples números. Para construir un ejemplo se puede utilizar la primera premisa del último ejemplo indicado.

Cada número positivo es mayor que 0.
$1+3$ es un número positivo.
Por tanto, $1+3$ es mayor que 0.

Utilizando los símbolos ya introducidos, se puede escribir la demostración de este razonamiento, aplicando la especificación universal para obtener la línea (3).

(1)	$(\forall x)(Px \rightarrow x>0)$	P
(2)	$P\ (1+3)$	P
(3)	$P\ (1+3) \rightarrow 1+3>0$	$1+3/x$
(4)	$1+3>0$	PP 2, 3

(Se añade el paréntesis en «$P(1+3)$» para poner de manifiesto que el predicado «P» se aplica a «$1+3$» y no simplemente a «1».)

Los *signos de operación* $+$, $-$, $\times$, y $\div$, forman nuevos términos a partir de otros términos. Estos signos particulares indican operaciones *binarias,* porque cada uno de ellos combina *dos* términos para formar *un* nuevo término complejo. Por ejemplo «3» es un término, «4» es un término, y «3×4» es un término. Es un término complejo que se refiere al mismo número indicado por el término «12». Un signo de operación que forma otro término de sólo un término indica una operación *monaria.* Elevar un número al cuadrado es un ejemplo; «3» es un término y «3^2» es un término.

Evidentemente, los signos de operaciones numéricas están unidos a términos, nunca a proposiciones. No tiene sentido decir «(María juega a tenis) : (Juan juega a balonmano)» o decir «$5 \rightarrow 7$». El símbolo, $-$, podría prestarse a confusión, pues tiene dos significados diferentes. *Delante de un término* es un signo de operación monaria que transforma un número positivo en negativo, o transforma un número negativo en positivo. *Entre dos términos* es un signo de operación binaria que indica la sustracción.

Puesto que un término complejo es a su vez un término, puede combinarse también con signos de operación para formar más términos complejos. Es necesario indicar de alguna forma cuál es el signo de operación dominante para cada término complejo. ¿A qué número es igual $3+4\times 5$? Se pueden utilizar paréntesis para indicar las dos posibles agrupaciones.

$$(3+4)\times 5$$
$$3+(4\times 5)$$

La primera es 7×5 que es 35. La segunda es $3+20$ que es 23.

EJERCICIO 2

A. Poner los paréntesis adecuados para que las proposiciones siguientes sean ciertas.

1. $2+6\times 5=40$
2. $2+6\times 5=32$
3. $-3^2=-9$
4. $-3^2=9$
5. $12-3^2=3$
6. $12-3^2=81$
7. $24\div 3+2^2=12$
8. $24\div 3+2^2=3\frac{3}{7}$
9. $24\div 3+2^2=100$
10. $24\div 3+2^2=\frac{24}{25}$

B. Dar una demostración formal para cada uno de los razonamientos siguientes.

$3+7>2+5$

$2+5\neq 2\times 3$

1. Tres más siete es mayor que dos más cinco. $3+7\neq 2\times 3$
   Cada número mayor que dos más cinco no es igual a dos por tres.
   Por tanto, tres más siete no es igual a dos por tres.
2. Cada número que no es igual a cero es mayor que cero o menor que cero.
   Seis dividido por dos no es cero y seis dividido por dos no es menor que cero.
   Por tanto, seis dividido por dos es mayor que cero.
3. Un número es par si y sólo si es divisible por dos.
   Tres por cinco no es par, pero tres más cinco es divisible por dos.
   Por tanto, tres por cinco no es divisible por dos, pero tres más cinco es par.
4. Para todo x, x más uno es par o x no es impar. Si uno más tres no es par, entonces tres más uno no es par.
   Por tanto, si tres es impar, entonces uno más tres es par.
5. Tres sumado a cualquier número impar da un número par.
   (Indicación: Si un número es impar, entonces este número más tres es par.)
   Dos más tres es impar.
   Si el resultado de sumar tres a dos más tres es par, entonces ocho es par.
   Por tanto, ocho es par.

No estamos limitados a usar en una sola premisa de una demostración un cuantificador universal. El ejemplo que sigue ilustra este punto.

Para cada x, si x es un número par, entonces $x+2$ es par.
Para cada x, si x es un número par, entonces x no es un número impar.
Dos es un número par.
Por tanto, $2+2$ no es un número impar.

Definiendo, $Ex \leftrightarrow x$ es un número par y $Dx \leftrightarrow x$ es un número impar, se simboliza el razonamiento y se escribe una deducción,

(1)	$(\forall x)(Ex \rightarrow E(x+2))$	P
(2)	$(\forall x)(Ex \rightarrow \neg Dx)$	P
(3)	$E2$	P
(4)	$E2 \rightarrow E(2+2)$	$2/x$ 1
(5)	$E(2+2)$	PP 3, 4
(6)	$E(2+2) \rightarrow \neg D(2+2)$	$2+2/x$ 2
(7)	$\neg D(2+2)$	PP 5, 6

En este caso aparece un cuantificador universal en las líneas (1) y (2). En la línea (4) se aplica US a (1), poniendo «2» en vez de «x». En la línea (6) se aplica US a (2), pero en este caso resulta de la estructura del razonamiento que hay que poner «$2+2$» en vez de «x».

Ejercicio 3

A. Simbolizar los siguientes razonamientos utilizando símbolos lógicos y los símbolos típicos de la Aritmética tales como $+$, $>$, $<$, etc., adecuadamente.

1. Para cada y, si y es menor que 9, entonces y es menor que 10.
   $4+4$ es menor que 9.
   Por tanto, $4+4$ es menor que 10.
2. Para cada x, si x es mayor que cuatro, entonces x es mayor que tres.
   Uno más uno no es mayor que tres.
   Por tanto, uno más uno no es mayor que cuatro.

3. Para cada z, si z es igual a tres más uno entonces z es igual a dos más dos.
   Ocho menos cuatro es igual a tres más uno.
   Por tanto, ocho menos cuatro es igual a dos más dos.
4. Cada número negativo es menor que cero.
   Dos no es menor que cero.
   Por tanto, dos no es un número negativo.
5. Para cada x, si $x+1=1$ entonces x es menor que 1.
   $0+1=1$.
   Por tanto, 0 es menor que 1.
6. Cada número divisible por dos es par.
   Cuatro es o impar o un número divisible por dos.
   Cuatro no es impar.
   Por tanto, cuatro es par.
7. Para cada y, si y es la suma de números pares entonces y es un número par.
   Ocho es la suma de números pares.
   Doce es la suma de números pares.
   Por tanto, ocho y doce son ambos números pares.
8. Para cada x, si x es igual a diez, entonces x es mayor que ocho.
   Cinco más cinco es igual a diez o cinco más tres es igual a diez.
   Cinco más tres no es igual a diez.
   Por tanto, cinco más cinco es mayor que ocho.
9. Para cada x, no ocurre que x sea a la vez un número positivo y x sea un número negativo.
   Para cada x, si x es menor que 0, entonces x es un número negativo.
   $1+1$ es un número positivo.
   Por tanto, $1+1$ no es menor que 0.
10. Para cada x, si x es mayor que 2, entonces $x+2$ es mayor que 2.
    Para cada x, si $x+1$ es mayor que 2, entonces $x+2$ es mayor que 2.
    Por tanto, $2+2$ es mayor que 2.
11. Todas las arañas son arácnidos.
    Todos los arácnidos tienen ocho patas.
    Charlotte es una araña.
    Por tanto, Charlotte tiene ocho patas.
12. Ningún triángulo congruente a ABC es equilátero.
    Sólo los triángulos congruentes a ABC son congruentes a DEF.
    El triángulo GHI es equilátero.
    Por tanto, el triángulo GHI no es congruente a DEF

B. Escribir una deducción completa para cada uno de los razonamientos del Ejercicio **A**.

C. Probar las siguientes conclusiones presentando una deducción completa a partir de las premisas.

1. Demostrar: $2+0>1$
   (1) $(\forall x)(x=2 \rightarrow x=1+1)$
   (2) $(\forall x)(x=1+1 \rightarrow x>1)$
   (3) $2+0=2$

2. Demostrar: $\neg N3$
   (1) $(\forall x)(Nx \rightarrow x<0)$
   (2) $\neg(3<0)$

3. Demostrar: $Fa \rightarrow La$
   (1) $(\forall x)(Fx \rightarrow \neg Px)$
   (2) $(\forall x)(Px \lor Lx)$

4. Demostrar: $\neg N4$
   (1) $(\forall x)(x>0 \leftrightarrow Px)$
   (2) $(\forall x)(Px \rightarrow \neg Nx)$
   (3) $4>0$

5. Demostrar: $2\times 3\neq 0$
   (1) $(\forall y)(Py \lor Ny \rightarrow y\neq 0)$
   (2) $P(2\times 3)$

6. Demostrar: $5-5=0$
   (1) $(\forall x)(\neg Px \rightarrow (\neg Nx \rightarrow x=0))$
   (2) $\neg N(5-5)$
   (3) $(\forall x)(x>0 \leftrightarrow Px)$
   (4) $5-5 \not> 0$

7. Demostrar: $3<5$
   (1) $(\forall x)(x<4 \;\&\; 4<5 \rightarrow x<5)$
   (2) $(\forall z)(-4<-z \leftrightarrow z<4)$
   (3) $4<5$
   (4) $-4<-3$

8. Demostrar: $Sb \;\&\; Pb \rightarrow \neg Cb$
   (1) $(\forall u)(Su \;\&\; Ru \rightarrow \neg Cu)$
   (2) $(\forall u)(Pu \rightarrow Ru)$

9. Demostrar: $12=4\times 3$
   (1) $(\forall v)(12=v\times 3 \quad\leftrightarrow\quad 3+1=v)$
   (2) $(\forall v)(v+1=4 \quad\leftrightarrow\quad 8-v=5)$
   (3) $8-3=5$

10. Demostrar: $3+4<3+7$
   (1) $(\forall x)(x<2+6 \quad\rightarrow\quad x<3+7)$
   (2) $(\forall x)(x>2+5 \quad\vee\quad x<2+6)$
   (3) $3+4\not>2+5$

En distintas premisas que utilizan cuantificadores no se está obligado a utilizar siempre la misma variable. Supóngase que se pone «x» como única variable en la primera premisa. Cuando se escribe otra premisa que utiliza un cuantificador, se puede poner «x» otra vez o se puede también utilizar una variable distinta, por ejemplo «y». El ejemplo que sigue ilustra este punto, poniendo como antes «Ex» para «x es un número par», «Ox» para «x es un número impar» y «Px» para «x es un número positivo».

Demostrar: $E4$
(1) $(\forall x)(x>0 \quad\rightarrow\quad Ex \quad\vee\quad Ox)$
(2) $(\forall x)(Px \quad\rightarrow\quad x>0)$
(3) $P4$
(4) $\neg O4$

Este razonamiento se puede escribir también con la segunda premisa, expresada en la forma:

$$(\forall y)(Py \quad\rightarrow\quad y>0),$$

pues se puede utilizar o «x» o «y» para indicar todos los números. Simbolizando la segunda premisa con «y», la deducción es

(1) $(\forall x)(x>0 \quad\rightarrow\quad Ex \quad\vee\quad Ox)$	P
(2) $(\forall y)(Py \quad\rightarrow\quad y>0)$	P
(3) $P4$	P
(4) $\neg O4$	P
(5) $P4 \quad\rightarrow\quad 4>0$	$4/y$ 2

(6)	$4>0$	PP 3, 5
(7)	$4>0 \rightarrow E4 \lor O4$	$4/x$ 1
(8)	$E4 \lor O4$	PP 6, 7
(9)	$E4$	TP 4, 8

Obsérvese que se pone «4» en vez de «x» y más tarde «4» en vez de «y». Se puede especificar cada término en cualquier proposición universal.

Ejercicio 4

Simbolizar los razonamientos siguientes utilizando símbolos lógicos y los símbolos típicos de la Aritmética. Después escribir una deducción completa de la conclusión.

1. Para cada y, y es par si y sólo si $y+1$ es impar.
   Para cada x, si x es igual a $5+1$ entonces x es par.
   $5+1$ no es impar.
   Por tanto, 5 no es igual a $5+1$.
2. Para todo x, si $12=x+4$ o $x=5\times3$, entonces x no es par.
   Para cada y, y es par o y es impar.
   $15=5\times3$.
   Por tanto, 15 es impar.
3. Para todo z, si z es mayor que tres más cuatro, entonces z es mayor que cero.
   Cada y es positivo si y sólo si es mayor que cero.
   Tres más cinco es mayor que tres más cuatro.
   Por tanto, tres más cinco es positivo.
4. Cada alumno que ha hecho su trabajo entiende el problema.
   Juan es un alumno, pero no entiende el problema.
   Por tanto, Juan no ha hecho su trabajo.
5. El que compuso la «Obertura 1812» murió en plena madurez.
   Scarlatti escribió para el clavicordio.
   Nadie a la vez fue buen músico y murió en plena madurez.
   Todos los que escribieron para el clavicordio fueron buenos músicos.
   Por tanto, Scarlatti no compuso la «Obertura 1812».
6. Para todo x, si el cuadrado de x es nueve y x es mayor que dos, entonces x es tres.
   Cada y sería menor que cuatro si cada vez que es mayor que dos es igual a tres.
   El cuadrado de uno más dos es nueve.
   Por tanto, uno más dos es menor que cuatro.

7. Cada u que es igual a tres más cinco o es igual a diez más dos es divisible por cuatro.
   Cada x que es divisible por cuatro o divisible por seis es par.
   Por tanto, si nueve menos uno es igual a tres más cinco, entonces nueve menos uno es par.
8. Cada x divisible por doce es divisible por cuatro.
   Cada y divisible por cuatro es par.
   O z es divisible por dos o no es par.
   Quince no es divisible por dos.
   Por tanto, quince no es divisible por doce.
9. Cada número es o menor que cinco o a la vez mayor que tres y positivo.
   Si un número es mayor que cero, entonces si es menor que cinco es positivo.
   Cuatro es un número mayor que cero.
   Por tanto, cuatro es positivo.
10. Cada x es o mayor que cero o no es positivo.
    Ningún y que multiplicado por tres dé menos seis es mayor que cero.
    Por tanto, si cuatro más cinco es positivo, entonces $3\times(4+5)$, no es igual a menos seis.

● 6.2 *Dos o más cuantificadores*

No se pueden hacer muchas matemáticas u otros razonamientos sistemáticos utilizando sólo un cuantificador con cada proposición, pues en Matemáticas siempre se trabaja con relaciones entre dos o más objetos. Afortunadamente, es extremadamente sencillo extender todo lo que se ha hecho, incluyendo proposiciones que contengan más de un cuantificador universal siempre que los cuantificadores se encuentren al principio de la proposición.

Como ejemplo, se considera el razonamiento:

> Para cada x e y, si x es mayor que y, entonces no ocurre que y sea mayor que x.
> Dos es mayor que uno.
> Por tanto, no ocurre que uno sea mayor que dos.

Se puede simbolizar este razonamiento,

Demostrar: $\neg(1>2)$
(1) $(\forall x)(\forall y)(x>y \rightarrow \neg(y>x))$
(2) $2>1$

Obsérvese que simplemente se ponen dos cuantificadores universales, uno utilizando la variable «x» y otro la variable «y» al principio de la segunda premisa. A cada una de estas variables se le puede aplicar la especificación universal, y se sustituye «x» por «2» e «y» por «1». Una deducción completa tiene la forma:

(1)	$(\forall x)(\forall y)(x>y \;\rightarrow\; \neg(y>x))$	P
(2)	$2>1$	P
(3)	$2>1 \;\rightarrow\; \neg(1>2)$	$2/x$, $1/y$ 1
(4)	$\neg(1>2)$	PP 2, 3

Como segundo ejemplo, considérese el razonamiento:

> Para cada x e y, si x es igual a y, entonces y es igual a x.
> Uno más uno es igual a dos.
> Por tanto, dos es igual a uno más uno.

Al simbolizar este razonamiento, se utiliza el signo de igualdad típico, =

Demostrar: $2=1+1$
(1) $(\forall x)(\forall y)(x=y \;\rightarrow\; y=x)$
(2) $1+1=2$

Como en el primer ejemplo, se aplica la especificación universal poniendo «$1+1$» en vez de «x» y «2» en vez de «y», de manera que la segunda premisa sirva de antecedente de la implicación. Una vez hecha la sustitución sólo hay que aplicar el *modus ponendo ponens* para obtener la conclusión deseada. La deducción completa es

(1)	$(\forall x)(\forall y)(x=y \;\rightarrow\; y=x)$	P
(2)	$1+1=2$	P
(3)	$1+1=2 \;\rightarrow\; 2=1+1$	$1+1/x$, $2/y$ 1
(4)	$2=1+1$	PP 2, 3

Obsérvese que «2 es igual a $1+1$» y «2 es mayor que 1» son fórmulas atómicas, pero contienen dos términos. Expresan alguna relación matemática entre sus términos. Hay también muchas relaciones no matemáticas. «Isabel II es la madre del príncipe Carlos» y «Booth mató a Lincoln» expresan relaciones. Tales relaciones son predicados dobles.

Definiendo:

$Mxy \;\leftrightarrow\; x$ es la madre de y
$e=$Isabel II
$c=$príncipe Carlos,

la primera proposición se puede simbolizar:

$$Mec \quad \text{o} \quad eMc.$$

Análogamente, se puede simbolizar la segunda:

$$Kbl.$$

Cuando se utilizan equivalencias como «$Mxy \leftrightarrow x$ es madre de y», se expresa que siempre que se tenga «es madre de» en castellano se utilizará el símbolo .M», y siempre que se tenga «M» entre los símbolos, significará «es madre de» en el lenguaje corriente. «x» e «y» se utilizan para indicar que «es madre de» y «M» son predicados dobles, que requieren dos términos. Los términos «c» y «e» no se usan al dar la traducción de «es madre de» puesto que la traducción de cada término y de cada predicado ha de hacerse separadamente para conservar la claridad. Por separado se dan las traducciones de «Isabel», «Carlos», y «es madre de», pero no la de «Isabel es madre de Carlos» conjuntamente.

Frecuentemente, parece mejor escribir «xMy» en vez de «Mxy». Ambos son aceptables.

No basta contar el número de términos para decidir si una proposición en lenguaje usual se ha de simbolizar utilizando predicados simples o dobles.

Por ejemplo,

Wilbur y Oscar son hombres,

significa:

Wilbur es un hombre y Oscar es un hombre.

Definiendo:

$Mx \leftrightarrow x$ es un hombre
$w =$ Wilbur
$o =$ Oscar,

se obtiene en símbolos:

$$Mw \quad \& \quad Mo.$$

Consideremos:

Wilbur y Oscar son hermanos.

Esto no significa:

Wilbur es un hermano y Oscar es un hermano, sino:

Wilbur es el hermano de Oscar.

Definiendo,

$Bxy \leftrightarrow x$ es hermano de y
w=Wilbur
o=Oscar,

se obtiene en símbolos:

$$Bwo.$$

Como otro ejemplo, simbolicemos.

Si Francisca es la esposa de Francisco, entonces Francisco es un hombre.

Definiendo:

$Wxy \leftrightarrow x$ es la esposa de y
$Mx \leftrightarrow x$ es un hombre
e=Francisco
i=Francisca,

se obtiene en símbolos:

$$Wei \rightarrow Mi.$$

El ejemplo que sigue requiere cuantificadores.

Cada hombre es más viejo que cada muchacho.

Definiendo:

$Mx \leftrightarrow x$ es un hombre
$Bx \leftrightarrow x$ es un muchacho
$Oxy \leftrightarrow x$ es más viejo que y,

entonces la proposición se simboliza

$$(\forall x)(\forall y)(Mx \;\&\; By \rightarrow Oxy).$$

Ejercicio 5

A. Traducir en símbolos lógicos:

1. José molesta a Francisco.
2. El. Sr. García visita la Biblioteca Nacional.
3. Si Pedro visita a Juan, entonces Luisa visita a María.
4. Todos los objetos se atraen entre sí.
5. Cada águila es mayor que cada colibrí.
6. Los hermanos algunas veces riñen entre sí.
7. Cada muchacho que desee jugar a pelota, primero la ha de botar.
8. Luisa ayuda a María y es ayudada por Juana.
9. Los pájaros tienen miedo a los gatos.
10. Cada nación que teme a otra se prepara para luchar con ella.

B. Traducir los siguientes razonamientos en símbolos lógicos y dar una deducción de la conclusión a partir de las premisas.

1. Cada cosa en esta lección es una parte de la Lógica.
   Cada persona que puede resolver problemas en una parte de la Lógica es un genio.
   Carolina es una persona que puede resolver problemas sobre la primera deducción y está en esta lección.
   Por tanto, Carolina es un genio.
2. Mangostas pueden matar a las cobras.
   Montgomery no puede matar a Charlie.
   Por tanto, si Charlie es una cobra entonces Montgomery no es una mangosta.
3. Todo aquel que quiera a Jorge escogerá a Pedro para su partido.
   Pedro no es amigo de nadie que sea amigo de Juan.
   Luis no escogerá a nadie que no sea amigo de Carlos para su partido.
   Por tanto, si Carlos es amigo de Juan, entonces Luis no quiere a Jorge.
4. Sólo un tonto alimentaría a un oso salvaje.
   Cristina alimenta a Nicolás, pero no es tonta.
   Por tanto, Nicolás no es un oso salvaje.

C. Deducir las conclusiones requeridas de las premisas dadas. Se define: $Ex \leftrightarrow x$ es par, $Ox \leftrightarrow x$ es impar, $Px \leftrightarrow x$ es positivo, $Nx \leftrightarrow x$ es negativo, $Dx \leftrightarrow x$ es divisible por dos.

1. Demostrar: $5+3=3+5$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(x+y=y+x)$
2. Demostrar: $(4+3)+3>6+3$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(x>y \rightarrow x+3>y+3)$
   (2) $4+3>6$

3. Demostrar: $3/4<1$
   (1) $(\forall w)(\forall z)(w>z \;\rightarrow\; z/w<1)$
   (2) $4>3$

4. Demostrar: $E(3\cdot 8)$*
   (1) $(\forall x)(\forall y)(Ex \;\rightarrow\; E(x\cdot y))$
   (2) $(\forall u)(\forall v)(E(u\cdot v) \;\leftrightarrow\; E(v\cdot u))$
   (3) $E8$

5. Demostrar: $-4\cdot(-4)^2<-4$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(x<-1 \;\&\; y>1 \;\rightarrow\; x\cdot y<x)$
   (2) $(\forall z)(z<-1 \;\rightarrow\; z^2>1)$
   (3) $-4<-1$

6. Demostrar: $6\cdot 2/3<6$
   (1) $(\forall u)(\forall v)(u-v<0 \;\leftrightarrow\; u<v)$
   (2) $(\forall w)(\forall z)(w<1 \;\&\; w>0 \;\rightarrow\; z\cdot w<z)$
   (3) $2/3-1<0 \;\&\; 2/3>0$

7. Demostrar: $E(5+7)$
   (1) $(\forall y)(\forall z)(Oy \;\&\; Oz \;\rightarrow\; E(y+z))$
   (2) $(\forall x)(Ox \;\leftrightarrow\; \neg Dx)$
   (3) $(\forall w)(Ow \;\vee\; Ew)$
   (4) $\neg D7 \;\&\; \neg E5$

8. Demostrar: $5+1/4>5$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(Px \;\&\; Py \;\&\; x<1 \;\rightarrow\; y+x>y)$
   (2) $(\forall x)(\forall y)((Py \;\&\; Px) \;\vee\; \neg(y+x>x \;\vee\; y+x>y))$
   (3) $1/4<1$
   (4) $1/4+5>5$

9. Demostrar: $P5 \;\rightarrow\; (P(-3) \;\leftrightarrow\; P(5\cdot -3))$
   (1) $(\forall z)(\forall y)(Pz \;\&\; Py \;\rightarrow\; P(z\cdot y))$
   (2) $(\forall y)(\forall w)(Py \;\&\; \neg Pw \;\rightarrow\; \neg P(y\cdot w))$

10. Demostrar: $P7$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(x>0 \;\&\; y<0 \;\rightarrow\; Nx/y)$
   (2) $(\forall u)(\forall v)((u<0 \;\rightarrow\; Nv/u) \;\rightarrow\; Pv)$
   (3) $7>0$

No está limitado el uso a sólo a dos cuantificadores. Se pueden introducir tantos cuantificadores como sea necesario para simbolizar de manera

* El signo · se usa frecuentemente para la multiplicación.

adecuada las proposiciones enunciadas en el lenguaje usual. Los ejemplos que siguen, ilustran este punto.

> Para cada x, y y z, si x es mayor que y e y es mayor que z, entonces x es mayor que z.
> Dos es mayor que uno.
> Tres es mayor que dos.
> Por tanto, tres es mayor que uno.

Se introducen tres cuantificadores para las variables «x», «y» y «z» para simbolizar la primera premisa. El razonamiento completo se simboliza como sigue:

Demostrar: $3 > 1$

(1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x > y \quad \& \quad y > z \quad \rightarrow \quad x > z)$
(2) $2 > 1$
(3) $3 > 2$

En este caso, es necesaria alguna consideración para precisar las sustituciones que se han de hacer en vez de «x», de «y» y de «z» por especificación universal. La cuestión estriba en decidir cómo se pueden utilizar las dos premisas adicionales para formar el antecedente de una condicional que tenga la conclusión como consecuente. En el caso presente la clave del asunto es que se desea sustituir la variable «y» por un número que ha de ser a la vez mayor que un número y menor que otro número. Mirando las dos otras premisas se ve que este número ha de ser «2». El resto de la sustitución es entonces claro. Tres es mayor que dos y dos es mayor que uno, por tanto se sustituye «x» por «3» y «z» por «1». La deducción completa es:

(1)	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x > y \quad \& \quad y > z \quad \rightarrow \quad x > z)$	P
(2)	$2 > 1$	P
(3)	$3 > 2$	P
(4)	$3 > 2 \quad \& \quad 2 > 1 \quad \rightarrow \quad 3 > 1$	$3/x$, $2/y$, $1/z$ 1
(5)	$3 > 2 \quad \& \quad 2 > 1$	A 2, 3
(6)	$3 > 1$	PP 4, 5

Ejercicio 6

A. Traducir los siguientes razonamientos a símbolos lógicos y dar una deducción de la conclusión a partir de las premisas.

1. La hermana de la madre de cada muchacho es su tía.
   Juan es un muchacho y Marta es la hermana de Helena.
   Todos los tíos de Juan le mandan regalo de cumpleaños.
   Por tanto, si Helena es la madre de Juan, Marta le manda regalo de cumpleaños.
2. Los coroneles tienen graduación superior a la de los sargentos y los sargentos tienen mayor graduación que los soldados.
   Todo aquel que tiene menos graduación que otro tiene que recibir órdenes de él.
   Todo aquel que tiene más graduación que otro que a su vez tiene más graduación que un tercero, tiene más graduación que el tercero.
   López es un coronel. Pérez es un sargento y Gómez es un soldado.
   Por tanto, Gómez ha de recibir órdenes de López.
3. Para cada x e y si x es mayor que y, y no es mayor que x.
   Por tanto, uno no es mayor que uno.
   (Indicación: Intentar una demostración indirecta.)
4. Para cada x e y, x es igual o mayor que y o y es igual o mayor que x.
   Por tanto, uno es igual o mayor que uno.

B. Deducir la conclusión de las premisas dadas presentando una demostración completa en la forma típica.

1. Demostrar: $4=2+2$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x=y \quad \& \quad y=z \quad \rightarrow \quad x=z)$
   (2) $4=2^2$
   (3) $2^2=2+2$

2. Demostrar: $2\neq 1$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x=y \quad \& \quad x>z \quad \rightarrow \quad y>z)$
   (2) $\neg(1>1)$
   (3) $2>1$

3. Demostrar. $2=1+1$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x=y+1 \quad \vee \quad (x=y \quad \& \quad y=z+1)]$
   (2) $2\neq 1 \quad \vee \quad 1\neq 0+1$

C. De las siguientes premisas (1) a (4), deducir cada una de las conclusiones escritas debajo.

(1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xQy \;\&\; yQz \rightarrow xQz)$
(2) $(\forall x)(\forall y)(xQy \lor yQx)$
(3) $(\forall x)(\forall y)(xIy \leftrightarrow xQy \;\&\; yQx)$
(4) $(\forall x)(\forall y)(xPy \leftrightarrow \neg yQx)$

Las conclusiones son

(*a*) bIb (Indicación: se hará uso de (3) y (2)).
(*b*) $aPb \rightarrow \neg bPa$.
(*c*) $aPb \;\&\; bQc \rightarrow aQc$.

● 6.3 *Lógica de la identidad*

En castellano se pone con frecuencia alguna forma del verbo «ser» (como «es», «era», «son», «eran») entre dos términos para indicar que nombran o se refieren a una misma cosa. Por ejemplo,

(1) Isabel II es la reina de Inglaterra.

Esto significa

(2) «Isabel II» nombra o indica la misma cosa que «la reina de Inglaterra».

o

(3) Isabel II es lo mismo que la reina de Inglaterra.

o

(4) Isabel II es idéntica a la reina de Inglaterra.

Definiendo:

$e=$ Isabel II
$q=$ la reina de Inglaterra:

se puede simbolizar en la forma:

$$e=q.$$

El signo igual, $=$, se denomina también «signo de identidad».

Sin embargo, el verbo «ser» se utiliza también en otro sentido. Las dos proposiciones que siguen tienen el mismo aspecto que (1); sin embargo, no se pueden enunciar en formas análogas a la (2), (3) o (4):

(5) Isabel II es una mujer.
(6) Las mujeres son personas.

Sería incorrecto enunciarlas en la forma:

(7) «Isabel II» nombra o indica la misma cosa que «una mujer».
(8) Mujeres son idénticas a personas.

Para decidir cuándo una proposición puede traducirse utilizando el signo de identidad es necesario precisar lo que significa. Frecuentemente ayuda a ello al intentar ponerlas en la forma de (2), (3) o (4) y decidir si lo que resulta significa lo mismo.

Hay que recordar que el signo de identidad se coloca sólo entre términos que han de ser nombres de una y la misma cosa. Dos cosas distintas no son una misma cosa. Así, dos lapices nuevos de la misma caja, aunque tengan una apariencia tan igual que no se distingan, son sin embargo lápices distintos —no son idénticos—. Sería falso decir «primer lápiz = segundo lápiz»; decir que son iguales o idénticos significa que son el *mismo* lápiz, no que son tan análogos que no se distinguen. El signo = no se coloca entre dos *cosas,* sino entre dos *símbolos de expresiones,* y lo que significa es que las dos expresiones se refieren a *una* misma cosa. Así se puede decir

George Washington = el primer presidente de los Estados Unidos.

La idea es simple. Pero en el lenguaje usual son frecuentes las confusiones, pues se usan las palabras «igual» o «idéntico» de forma no estrictamente exacta («Estos lápices son idénticos») y no de acuerdo con el sentido matemático y lógico preciso.

Ejercicio 7

A. Traducir las siguientes proposiciones utilizando el signo de identidad cuando sea apropiado.

1. El 4 de julio es el Día de la Independencia.
2. Sir Francis Drake era un corsario.
3. Los gatos son felinos.

4. Un quinto es el veinte por ciento.
5. Benjamín Franklin fue un impresor.
6. Franklin fue el autor de *Poor Richard's Almanac.*
7. Monterrey no es la capital de California.
8. No todo caballo es buen corredor.
9. Si Mario es un fotógrafo, entonces es el chico del que oí hablar.
10. Si x es tres, entonces no es igual a y.

La identidad juega un papel importante en Lógica matemática. Estúdiese el ejemplo siguiente.

Ejemplo a.

(1)	$2>1$	P
(2)	$2=1+1$	P
(3)	$1+1>1$	I 1, 2

La línea (3) se obtiene de la línea (1) sustituyendo «2» por «1+1». Esto se justifica por medio de la «regla de identidades», pues la línea (2) dice que «2» y «1+1» son nombres para la misma cosa.

Un ejemplo que contiene variables es el siguiente:

Ejemplo b.

(1)	$(\forall x)(\forall y)(x>y \;\rightarrow\; x+1>y)$	P
(2)	$1>0$	P
(3)	$2=1+1$	P
(4)	$1>0 \;\rightarrow\; 1+1>0$	$1/x$, $0/y$ 1
(5)	$1+1>0$	PP 2, 4
(6)	$2>0$	I 3, 5

Obsérvese la aplicación de la regla de identidades para obtener (6) de (3) y (5). Se expresa abreviadamente esta regla por **I**. Obsérvese también cómo se ha usado la regla de identidades. Después de especificar «1» para la «x» y «0» para la «y», se obtiene por *ponendo ponens*

$$1+1>0.$$

Se utiliza después, inmediatamente, la regla de sustitución de identidades, sustituyendo «1+1» por «2» para obtener la conclusión

$$2>0.$$

Demos ahora el siguiente enunciado de la «regla de identidades»:

> *Se supone que* S *es una fórmula que contiene el término* c, *si se transforma* S *en* **R** *sustituyendo una o más veces en que aparece la* c *en* S *por la* d, *entonces de* S *y la identidad* c=d *se puede concluir* **R**..

Obsérvese cómo se aplica esta regla a los *ejemplos a* y *b*. En el *ejemplo a,* la línea (1) «$2 > 1$» corresponde a S, la línea (2) «$2=1+1$» es la identidad, y la conclusión línea (3) «$1+1 > 1$» es igual que (1) con la excepción de que en (3) se sustituye «2» por «$1+1$». Así (3) corresponde a **R** y es consecuencia lógica de (1) y (2) por la regla de identidades. Esta regla ha sido aplicada con cierta extensión por todos los que han estudiado algo de matemáticas. Lo que se ha hecho aquí es encuadrarla como parte formal de la Lógica.

El uso de la regla en un ejemplo no matemático que contiene una prueba indirecta es el siguiente:

Ejemplo:

> El agente que encontró la carta estaba en el apartamento. Ahora si alguien estaba en el apartamento estaba en la ciudad. Si alguien estaba en Méjico no estaba en la ciudad. En efecto, Higinio estaba en Méjico. Por tanto, Higinio no es el agente que encontró la carta.

(1)	Ac	P
(2)	$(\forall x)(Ax \rightarrow Tx)$	P
(3)	$(\forall x)(Mx \rightarrow \neg Tx)$	P
(4)	Mh	P
(5)	$Mh \rightarrow \neg Th$	h/x 3
(6)	$\neg Th$	PP 4, 5
(7)	$Ah \rightarrow Th$	h/x 2
(8)	$\neg Ah$	TT 6, 7
(9)	$\quad h=c$	P
(10)	$\quad \neg Ac$	I 8, 9
(11)	$\quad Ac \;\&\; \neg Ac$	A 1, 10
(12)	$h \neq c$	RAA 9, 11

Ejercicio 8

A. Simbolizar los siguientes razonamientos y demostrar que la inferencia es válida deduciendo las conclusiones.

1. Todos los números positivos son mayores que cero.
   Tres es un número positivo.
   Tres es igual a dos más uno.
   Por tanto, dos más uno es mayor que cero.
2. Todos los miembros del comité viven en esta ciudad.
   El presidente de la sociedad es un miembro del comité.
   La Srta. López es la presidente de la sociedad.
   Por tanto, la Srta. López vive en esta ciudad.
3. Eduardo podía haber visto el coche del asesino.
   Ramsey fue el primer testigo de la defensa.
   O Eduardo estaba en la fiesta o Ramsey dio testimonio falso.
   En efecto, nadie en la fiesta pudo haber visto el coche del asesino.
   Por tanto, el primer testigo de la defensa dio testimonio falso.
4. Samuel Clemens era capitán de barco fluvial.
   Ningún capitán de barco fluvial ignora ninguna señal de peligro.
   Mark Twain escribió sobre las cosas que él no ignoraba.
   Mark Twain era Samuel Clemens.
   Por tanto, si las luces en los puentes son señales de peligro, entonces Mark Twain escribió sobre ellas.

B. Deducir las siguientes conclusiones de las premisas dadas, dando una demostración formal completa en la forma típica.

1. Deducir: $a \neq b$
   (1) $(\forall x)(Tx \rightarrow Bx)$
   (2) $\neg Ba$
   (3) Tb

2. Deducir: $2^2 + 1 > 2^2$
   (1) $4 = 2^2$
   (2) $4 = 4$
   (3) $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow x + 1 > y)$

3. Deducir: $2 + 3 = 5$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$
   (2) $3 + 2 = 5$

4. Deducir: $3^2 \neq 6$
   (1) $(\forall x)(x < 7 \rightarrow x < 8)$
   (2) $\neg(3^2 < 8)$
   (3) $6 < 7$

5. Deducir: $\neg(3^2=6)$
   (1) $(\forall x)(x>7 \quad \rightarrow \quad \neg(x=6))$
   (2) $3^2=9$
   (3) $9>7$

6. Deducir: $E36$
   (1) $(\forall z)(z^2=z\cdot z)$
   (2) $(\forall x)(\forall y)(Ex \quad \rightarrow \quad E(x\cdot y))$
   (3) $E6$
   (4) $6^2=36$

7. Deducir: $4+3\neq 3\cdot 2$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(x+3=y+2 \quad \rightarrow \quad x+1=y)$
   (2) $4+1\neq 4$
   (3) $3\cdot 2=4+2$

8. Deducir: $3+2=5$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x-y=z \quad \leftrightarrow \quad y+z=x)$
   (2) $5-3=1+1$
   (3) $1+1=2$

9. Deducir: $0\ (25)$
   (1) $(\forall u)(\forall v)(\forall w)(u+v=u+w \quad \rightarrow \quad v=w)$
   (2) $4+5^2=29$
   (3) $(\forall x)(\forall y)(x^2=y \quad \rightarrow \quad (Ox \quad \rightarrow \quad Oy))$
   (4) $4+25=29$
   (5) $0\ (5)$

10. Deducir: $4>-4$
    (1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x>y \quad \& \quad y>z \quad \rightarrow \quad x>z)$
    (2) $4>2+1$
    (3) $(\forall w)(\forall z)(Pw \quad \& \quad Nz \quad \rightarrow \quad w>z)$
    (4) $P3 \quad \& \quad N(-4)$
    (5) $2+1=3$

11. Deducir: $3\cdot 7=21$
    (1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z))$
    (2) $3\cdot 5=15$
    (3) $3\cdot 2=6$
    (4) $2+5=7$
    (5) $6+15=21$

• 6.4 *Certezas lógicas*

Una certeza lógica es una fórmula que es cierta independiente de la certeza o falsedad de hecho de cada premisa particular. Las tautologías son ejemplos de certeza lógicas, pues son siempre ciertas en virtud de su forma. Otros ejemplos son afirmaciones de la forma siguiente:

$$1=1$$
$$x=x$$
$$\text{Lincoln}=\text{Lincoln}$$
$$3+4=3+4$$
$$\text{la estrella vespertina}=\text{la estrella vespertina.}$$

Es una certeza lógica el que cada cosa es igual a sí misma.

La *regla de certezas lógicas* (L) permite hacer uso de certezas lógicas en las demostraciones formales, su enunciado es:

> *Una certeza lógica puede ser introducida en cualquier momento en una deducción.*
> *No depende de las premisas.*

Añadir una certeza lógica en una demostración no es, pues, añadir una premisa, y está justificado por la regla L.

La necesidad de la regla de certezas lógicas se ve en el siguiente ejemplo:

Demostrar: $2+1=(1+1)+1$
(1) $2=1+1$.

Ciertamente, parece que la conclusión es consecuencia de la premisa, y la regla para certezas lógicas permite demostrar la conclusión.

(1)	$2=1+1$	P
(2)	$2+1=2+1$	L
(3)	$2+1=(1+1)+1$	I 2, 1

La línea (2) es una certeza lógica que se ha construido seleccionando el primer miembro de la conclusión deseada y estableciendo que es igual a sí mismo. Obsérvese también como se ha utilizado la regla de identidades. Aquí la línea (2) corresponde a S de la regla, el primer miembro «2» es c y «1+1» es d. Así (1) corresponde a $c=d$ y R, la conclusión, se obtiene poniendo «1+1» en vez del segundo miembro «2» en la línea (2).

La regla L también se puede utilizar en Lógica proposicional. Estúdiese esta demostración:

(1)	$P \rightarrow Q$	P
(2)	$\neg P \rightarrow R$	P
(3)	$P \vee \neg P$	L
(4)	$Q \vee R$	DS 3, 1, 2

En la página 172 se demostró que $P \vee \neg P$ es una certeza lógica. Sin la regla L este razonamiento requeriría una demostración indirecta de nueve líneas. Ya se ha hecho notar que las tautologías son certezas de lógica. Se pueden deducir como conclusiones no dependientes de las premisas, de la misma manera que se pueden construir utilizando tablas de certeza. Considérese la tautología, $(P \rightarrow \neg P) \rightarrow \neg P$

Demostración

(1)	$P \rightarrow \neg P$	P
(2)	P	P
(3)	$\neg P$	PP 1, 2
(4)	$P \;\&\; \neg P$	A 2, 3
(5)	$\neg P$	RAA 2, 4
(6)	$(P \rightarrow \neg P) \rightarrow \neg P$	CP 1, 5

EJERCICIO 9

A. Deducir cada conclusión de las premisas dadas:

1. Deducir: $3+1=(2+1)+1$
   (1) $3=2+1$
2. Deducir: $4=2+2$
   (1) $2+2=4$
3. Deducir: $(2\cdot 3)\cdot 5=30$
   (1) $2\cdot 3=6$
   (2) $6\cdot 5=30$
4. Deducir: $(2\cdot 7)\cdot 15=14\cdot(3\cdot 5)$
   (1) $2\cdot 7=14$
   (2) $3\cdot 5 = 15$

5. Deducir: $2\cdot(3+4)=(2\cdot 3)+(2\cdot 4)$
   (1) $3+4=7$
   (2) $2\cdot 7=14$
   (3) $6+8=14$
   (4) $2\cdot 3=6$
   (5) $2\cdot 4=8$

6. Deducir: $8+(5-2)=(2\cdot 3)+5$
   (1) $(\forall w)(\forall z)(w+z=z+w)$
   (2) $3+8=11$
   (3) $5-2=3$
   (4) $2\cdot 3=6$
   (5) $5+6=11$

7. Deducir: $(1+0)+1=2$
   (1) $(\forall x)(x+0=x)$
   (2) $1+1=2$

8. Deducir: $2+(2+1)=5$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(x+y=y+x)$
   (2) $3=2+1$
   (3) $3+2=5$

9. Deducir: $2\cdot(5\cdot 7)=70$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(x\cdot y=y\cdot x)$
   (2) $5\cdot 7=35$
   (3) $35\cdot 2=70$

10. Deducir: $13-(1+2)=2\cdot 5 \quad \rightarrow \quad 10=4+6$
   (1) $13-3=10$
   (2) $2\cdot(2+3)=4+6$
   (3) $1+2=3$
   (4) $2+3=5$

B. Dar deducciones de las siguientes tautologías.

1. $\mathsf{P} \vee \mathsf{Q} \rightarrow (\mathsf{R} \;\&\; \mathsf{Q}) \vee (\mathsf{P} \vee \mathsf{Q})$
2. $\mathsf{P} \;\&\; (\mathsf{Q} \vee \mathsf{R}) \rightarrow (\mathsf{P} \;\&\; \mathsf{Q}) \vee (\mathsf{P} \;\&\; \mathsf{R})$
3. $[\mathsf{P} \rightarrow (\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R})] \rightarrow [\mathsf{P} \;\&\; \mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}]$
4. $\mathsf{P} \;\&\; \mathsf{Q} \rightarrow \neg\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$
5. $\neg(\neg\mathsf{P} \rightarrow \neg\mathsf{Q}) \rightarrow \neg\mathsf{P} \;\&\; \mathsf{Q}$
6. $(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q}) \leftrightarrow (\neg\mathsf{P} \leftrightarrow \neg\mathsf{Q})$

Examen de repaso

I. Traducir en símbolos lógicos:

a. Carlota pasea en coche con Ana.
b. Ningún hombre puede correr veinte millas por hora.
c. Beethoven es el compositor de «Fidelio».
d. Demócratas no están de acuerdo con republicanos.
e. Thomas Jefferson es el autor de la Declaración de Independencia.
f. El abogado del Estado representa al gobierno en los casos ante los tribunales civiles.
g. Todas las tortugas son reptiles.
h. Audubon fue un naturalista americano famoso por sus estudios sobre los pájaros.

II. Colocar los paréntesis necesarios para que sean correctas las identidades.

a. $2 \times 5 - 3 = 7$
b. $3 \times 4 + 5 = 27$
c. $4 + 5^2 = 29$
d. $4 + 5^2 = 81$
e. $24 \div 6 - 2 = 2$
f. $24 \div 6 - 2 = 6$

III. Traducir los siguientes razonamientos en símbolos lógicos. Después deducir las conclusiones de las premisas.

a. Cada miembro de nuestra clase o trabaja en la función o en la preparación de ésta.
Los que trabajan en la función están ensayando.
Los que trabajan en la preparación de ésta están pintando las decoraciones.
Por tanto, si Pablo es un miembro de nuestra clase, entonces Pablo o está ensayando o está pintando las decoraciones.

b. Cada chico es más joven que su padre.
Carlos es un chico que no es más joven que Francisco.
Todo el que esté casado con Virginia es el padre de Carlos.
Por tanto, Francisco no está casado con Virginia.

c. Cada niña de la familia Ron está en el cuadro de honor.
Luisa es una niña de la familia Ron.
El que recibió el premio de poesía no estaba en el cuadro de honor.
Por tanto, Luisa no recibió el premio de poesía.

IV. Deducir las conclusiones requeridas.

a. Demostrar: $\neg Ra \quad \vee \quad Pb$
(1) $(\forall x)(Rx \quad \rightarrow \quad Sx)$
(2) $\neg Sa$

b. Demostrar: $\sqrt{25}<0 \quad \vee \quad \sqrt{25}>0$
(1) $(\forall x)(x<0 \quad \leftrightarrow \quad Nx)$
(2) $(\forall x)(x>0 \quad \leftrightarrow \quad Px)$
(3) $P(\sqrt{25}) \quad \vee \quad N(\sqrt{25})$

c. Demostrar: $3+5>2+2$
(1) $(\forall x)(x>5 \quad \vee \quad x<7)$
(2) $3+5\nless 7$
(3) $(\forall y)(y>5 \quad \rightarrow \quad y>2+2)$

d. Demostrar: $Mca \quad \rightarrow \quad Pec$
(1) $(\forall x)(\forall y)(\neg Mxy \quad \vee \quad Syx)$
(2) Ba
(3) $(\forall u)(\forall z)(Szc \quad \rightarrow \quad (Bz \quad \rightarrow \quad Puc))$

e. Demostrar: $3+4>3$
(1) $(\forall x)(\forall y)(x>y+3 \quad \rightarrow \quad x>y)$
(2) $(\forall z)(\forall u)(u-3<z \quad \rightarrow \quad 3+z>u)$
(3) $(3+3)-3<4$

f. Demostrar: $5+2=2+(2+3)$
(1) $(\forall x)(\forall y)(x+y=y+x)$
(2) $2+3=5$

g. Demostrar: $5-4=1 \quad \rightarrow \quad 6\cdot(5-4)=6$
(1) $(\forall v)(v\cdot 1=v)$

CAPITULO 7

UN SISTEMA MATEMÁTICO SIMPLE: AXIOMAS DE LA ADICIÓN

● 7.1 *Axioma de la propiedad conmutativa*

En el presente capítulo se muestra cómo la Lógica que hemos aprendido hasta aquí puede aplicarse para desarrollar, de manera lógica, un sistema matemático simple. Las conclusiones numéricas que se deducen son elementales y de uso cuotidiano. Las premisas que se establecen son también familiares, aunque su importancia fundamental puede que no se haya percibido con toda claridad. Lo notable e interesante es el gran número de conclusiones que se pueden deducir de muy pocas premisas fundamentales.

En Matemáticas, las premisas que se utilizan una y otra vez debido a su carácter básico y universal se denominan *axiomas*. Esta sección empieza con el *axioma de la propiedad conmutativa* o *axioma de conmutatividad* para la adición. El axioma dice que no importa el orden en que se sumen los números. Su forma es:

$$(\forall x)(\forall y)(x+y=y+x).$$

Por especificación universal se obtienen expresiones familiares como

$$\begin{gathered} 0+2=2+0 \\ 1+2=2+1 \\ 3+1=1+3 \\ (2\times 3)+(1+4)=(1+4)+(2\times 3) \end{gathered}$$

Con la propiedad conmutativa como única premisa, difícilmente es posible deducir algo interesante. Pero se introducirán algunas premisas adicionales como *definiciones*. En particular, se definen los números arábigos conocidos «2», «3», «4» y «5», a partir del «1».

DEFINICIONES:

$$2 = 1 + 1$$
$$3 = 2 + 1$$
$$4 = 3 + 1$$
$$5 = 4 + 1$$

Cada número natural se obtiene, pues, añadiendo uno al anterior. Puesto que se ha de discutir la adición, es interesante precisar sobre los distintos modos de hablar sobre sumas. Considérese

$$a + b.$$

Aquí se entiende que se parte de a y se le añade b. Se puede llamar «la suma de a y b»,«b sumado a a» o «a más b». Esta variedad de expresiones pueden utilizarse al leer sumas complejas. Por ejemplo, «$(x+y)+z$» se puede leer «z sumado a la suma de x e y».

Las cuatro definiciones de los números y el axioma de conmutatividad de la adición proporcionan un total de cinco premisas con las que se trabajará. Se pueden ahora demostrar algunas cosas muy simples. Cada conclusión que se demuestre se denominará un *teorema*. Esta es la forma típica como se emplea la palabra teorema en Matemáticas. Cada teorema que se demuestre en este capítulo o que se proponga como ejercicio es una consecuencia lógica del axioma y de las definiciones introducidas. Es decir, cada teorema o conclusión demostrada será consecuencia lógica de los axiomas y definiciones dados como premisas. En cada deducción en este capítulo se utilizarán las mismas premisas. Por tanto, no es preciso escribir todas las premisas para cada ejemplo. Simplemento se hará referencia a las premisas (axiomas y definiciones) nombrando cada una que se utilice. La demostración del Teorema I ayudará a poner en claro esta manera de proceder.

TEOREMA 1. $3 = 1 + 2$

Demostración

(1) $3 = 2 + 1$	Def. de 3
(2) $2 + 1 = 1 + 2$	$2/x$, $1/y$, Conm. Ax.
(3) $3 = 1 + 2$	I 1, 2

Obsérvese que en la *demostración* del Teorema I no se escriben todas las premisas, pero se hace referencia a ellas nombrándolas. Se empieza en la línea (1) con una de las premisas, la definición de «3». En la línea (2) se utiliza otra premisa, el axioma de conmutatividad de la adición, y se aplica la especificación universal. La justificación de este paso se indica por «$2/x$, $1/y$, Conm. Ax.».

La razón de este cambio de estilo es que, puesto que en cada deducción se utilizan las mismas premisas, no es necesario ponerlas como líneas en la deducción. Evidentemente, en *cada* razonamiento no se usan todos los axiomas fundamentales y definiciones. Se nombrarán sólo las premisas que se hayan utilizado. La abreviatura de «axioma de la propiedad conmutativa» será «Conm. Ax.», y para las definiciones se escribirá «Def. de 2», «Def. de 3», etc.

A lo largo de este capítulo, los axiomas fundamentales y cada definición que se haya introducido se pueden utilizar como premisas. Además, después de demostrado un teorema se puede utilizar también este teorema en demostraciones futuras. A menudo se puede utilizar un teorema «ya demostrado» en la deducción de otro. Esto se puede hacer puesto que se ha probado que el teorema se deduce lógicamente de las premisas y se puede utilizar de la misma manera que se puede utilizar cualquier línea en una deducción para dar un paso posterior. Cuando un teorema ya deducido se utiliza en este sentido, se justifica el paso dado, haciendo referencia al teorema correspondiente, teorema 2, teorema 5, etc. Los teoremas se abreviarán de la forma siguiente: Teorema 1 se abrevia «T. 1», etc.

Teorema 2. $4 = 1 + (1 + 2)$

Demostración

(1) $4 = 3 + 1$	Def. de 4
(2) $3 + 1 = 1 + 3$	$3/x$, $1/y$, Conm. Ax.
(3) $4 = 1 + 3$	I 1, 2
(4) $4 = 1 + (1 + 2)$	I 3, T. 1

Obsérvese que en la demostración del Teorema 2, se obtiene la línea (4) de la línea (3) y el Teorema 1 por la regla de identidades. El paréntesis que encierra «$1 + 2$» se ha de añadir a la línea (4) para poner de manifiesto el punto exacto en el que se aplica la sustitución de expresiones idénticas.

Frecuentemente, la regla de certezas lógicas (regla L) será útil, en especial si las expresiones a ambos lados del signo de identidad contienen mas de un entero. Considérese el siguiente

TEOREMA 3. $(1+1)+(1+2)=2+3$

Demostración

(1)	$(1+1)+(1+2)=(1+1)+(1+2)$	L
(2)	$2=1+1$	Def. de 2
(3)	$(1+1)+(1+2)=2+(1+2)$	I 1, 2
(4)	$1+2=2+1$	$1/x$, $2/y$, Conm. Ax.
(5)	$1+2=3$	I 4, Def. de 3
(6)	$(1+1)+(1+2)=2+3$	I 3, 5

EJERCICIO 1

A. Demostrar los siguientes teoremas.

TEOREMA 4. $3=1+(1+1)$
TEOREMA 5. $5=1+(1+(1+2))$
TEOREMA 6. $4=(1+2)+1$
TEOREMA 7. $5=1+((2+1)+1)$
TEOREMA 8. $2+(1+3)=4+2$
TEOREMA 9. $((1+2)+1)+2=(1+1)+4$

B. Estos axiomas, definiciones y teoremas para la adición pueden también ser utilizados para demostrar conclusiones deducidas de premisas particulares dadas.

1. Demostrar: $4>3$
   (1) $(1+2)+1>(1+2)$

2. Demostrar: $x \ngtr 1+1$
   (1) $x>2 \quad \rightarrow \quad x=(1+2)+1$
   (2) $x \neq 4$

3. Demostrar: $x>(1+2)+1$
   (1) $x=5$
   (2) $x>4 \quad \& \quad x<6 \quad \leftrightarrow \quad x=1+(1+(1+2))$

4. Demostrar: $3>2$
   (1) $(\forall x)(x+1>x)$

5. Demostrar: $5>2$
(1) $(\forall x)(\forall y)(y>0 \rightarrow x+y>x)$
(2) $3>0$
(3) $3+2=4+1$

C. La adición es una operación binaria entre números que es conmutativa. Dar un ejemplo de una operación binaria numérica que *no* sea conmutativa.

D. Dar un ejemplo distinto de la adición de una operación binaria numérica conmutativa.

E. Dar un segundo ejemplo de una operación numérica binaria no conmutativa.

● 7.2 *Axioma de la propiedad asociativa*

La operación de adición se verifica exactamente entre dos números. Esto es lo que significa el decir que la adición es una operación binaria. Si se presenta la suma $x+y+z$, primero se suma x a y y el resultado se suma a z. Esto se puede indicar mediante paréntesis: $(x+y)+z$. También se podría primero sumar y con z y el resultado añadirlo a x, como se indica en $x+(y+z)$. Estas dos formas de asociar $x+y+z$ dan lugar a la misma suma. Esto se afirma en el «axioma de la propiedad asociativa»:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x+y)+z=x+(y+z))$$

La propiedad asociativa se denomina algunas veces principio de agrupación para la adición, significando que no importa la manera como se agrupen los números para ser sumados.

Como ejemplo, se puede efectuar la siguiente especificación universal.

$$(3+5)+7=3+(5+7) \qquad 3/x,\ 5/y,\ 7/z. \text{ Asoc. Ax.}$$

Primero, sumando los paréntesis por separado se tiene

$$8+7=3+12$$

o

$$15=15.$$

La asociatividad de la adición es tan familiar que es difícil apreciar su importancia o imaginar que pudiera ser de otra manera. Pero la sustracción es un ejemplo de una operación binaria no asociativa. Considérese, por ejemplo,

$$8 - 5 - 2.$$

Esta expresión es ambigua, pues

$(8 - 5) - 2$ es $3 - 2$ ó 1, mientras que $8 - (5 - 2)$ es $8 - 3$ ó 5.

Es decir,

$$(8-5)-2 \neq 8-(5-2).$$

Se puede utilizar el axioma de asociatividad para demostrar algunos teoremas que expresan certezas de Aritmética que son muy familiares. Lo interesante es ver exactamente cómo se deducen como consecuencia lógica de este axioma y de las cuatro definiciones dadas.

TEOREMA 10. $4=2+2$

Demostración

(1) $4=3+1$	Def. de 4
(2) $4=(2+1)+1$	I 1, Def. de 3
(3) $(2+1)+1=2+(1+1)$	$2/x$, $1/y$, $1/z$, Asoc. Ax.
(4) $4=2+(1+1)$	I 2, 3
(5) $4=2+2$	I 4, Def. de 2

Obsérvese que el axioma de la propiedad asociativa, abreviadamente «Asoc. Ax.», entra exactamente en el punto de la demostración en que se justifica la introducción de la línea (3). La línea (3) se obtiene del axioma especificando «2» en vez de «x», «1» en vez de «y», y «1» en vez de «z». El uso repetido de la regla de inferencia **I** referente a las identidades indica de manera clara que se trata de una regla de inferencia general importante en este tipo de teoremas que estamos demostrando.

Se ha dicho que cuando se usan axiomas, definiciones o teoremas previos no es necesario escribirlos en la demostración, sino que basta con hacer referencia de los mismos. Según esto la demostración del Teorema 10 podría empezarse en la línea (2), lo que se justificaría por la regla **I** aplicada a la definición de 4 y a la definición de 3 como se indica a continuación. Ambas demostraciones son correctas.

(1)	$4=(2+1)+1$	I Def. de 4, Def. de 3
(2)	$(2+1)+1=2+(1+1)$	$2/x$, $1/y$, $1/z$, Asoc. Ax.
(3)	$4=2+(1+1)$	I 1, 2
(4)	$4=2+2$	I 3, Def. de 2

Ejercicio 2

A. Da un ejemplo, distinto de la adición, de una operación aritmética que sea asociativa.

B. Dar un ejemplo, distinto de la sustracción, de una operación aritmética binaria que no sea asociativa.

C. Demostrar los siguientes teoremas.

Teorema 11. $5=3+2$
Teorema 12. $3=(1+1)+1$
Teorema 13. $4=((1+1)+1)+1$
Teorema 14. $4=(1+(1+1))+1$
Teorema 15. $5=2+(1+2)$
Teorema 16. $2+5=3+4$
Teorema 17. $5+3=(4+2)+2$

Obsérvese que se tienen ahora dos tipos de reglas de deducción: (1) Las reglas proposicionales: CP, RAA, y las de las páginas 110 y 111. Éstas dependen de las propiedades de certeza funcional de los términos de enlace; y (2) Las reglas que rigen la sustitución de términos: especificación universal y regla de identidades. Éstas se aplican sólo en Lógica predicativa. En este capítulo se han utilizado estas reglas junto con el axioma de conmutatividad y el de asociatividad y las definiciones de «2», «3», «4» y «5» para desarrollar la teoría de Aritmética. Los teoremas en este capítulo no utilizan las reglas proposicionales. Pero en los Problemas 2, 3 y 5 del Ejercicio 1 **B**, se han utilizado ambos tipos de reglas. Las reglas que rigen términos se han utilizado para obtener fórmulas atómicas diferentes en forma idéntica, de manera que pueden aplicarse las reglas proposicionales. Por ejemplo, en el Problema 3 es necesario demostrar que «$x=1+(1+(1+2))$» es equivalente a «$x=5$».

En algunas deducciones, será conveniente al especificar, sustituir variables por variables. Por ejemplo, la identidad

$$(x+z)+(3+z)=x+(z+(3+z))$$

se puede deducir del axioma de asociatividad por especificación universal poniendo x/x, z/y, y $(3+z)/z$. La especificación de términos conteniendo variables está permitida con una excepción. No se puede sustituir un término conteniendo una variable que entonces quede capturada por un cuantificador que pertenezca a la fórmula. Por ejemplo, la especificación universal no puede ser aplicada con propiedad a «$(\forall x)(\forall y)(Pxy)$» poniendo «$y$» en vez de «$x$» para obtener «$(\forall y)(Pyy)$», pues la y que sustituía a la x queda capturada por el cuantificador «$(\forall y)$». Esto puede evitarse introduciendo variables completamente nuevas, tales como u/x, v/y, $(3+w)/z$ en el axioma de la asociatividad, por ejemplo. Esto daría

$$(u+v)+(3+w)=u+(v+(3+w)).$$

Ejercicio 3

Dar demostraciones formales de los siguientes razonamientos.

1. Demostrar: $(1+2)+3>5$
   (1) $(\forall x)(x+1>x)$

2. Demostrar: $y=(3+z)+w$
   (1) $y=3+(z+w) \quad \vee \quad (z+w)+2\neq 2+(w+z)$

3. Demostrar: $(1+2)+(2+4)>(2+1)+2$
   (1) $4>0$
   (2) $(\forall x)(\forall y)(y>0 \quad \rightarrow \quad x+y>x)$

4. Demostrar: $x\neq 2+2 \quad \& \quad x=1+((2+1)+1)$
   (1) $x=4 \quad \rightarrow \quad x+y=1+(1+(1+2))$
   (2) $x=(2+y)+1 \quad \rightarrow \quad x=2+(1+2)$
   (3) $\neg(x+y=2+3 \quad \vee \quad x\neq 3+y)$

5. Demostrar: $a>y+2 \quad \vee \quad a<y+4$
   (1) $(\forall x)(x\neq 2+3 \quad \leftrightarrow \quad x>(1+2)+2 \quad \vee \quad x<5)$
   (2) $a>3+2 \quad \rightarrow \quad a>(y+1)+1$
   (3) $a<1+((2+1)+1) \quad \rightarrow \quad a<(y+3)+1$
   (4) $a\neq 5$

6. Demostrar: $x<4$
   (1) $x=1+2 \;\rightarrow\; x<(1+(1+1))+1$
   (2) $x=2 \;\rightarrow\; x<1+(2+1)$
   (3) $(x^2-5x)+(2+4)=0$
   (4) $(x^2-5x)+(3+3)=0 \;\rightarrow\; x=3 \;\vee\; x=1+1$

7. Demostrar: $x=5+3 \;\rightarrow\; x>4$
   (1) $x=(4+2)+2 \;\rightarrow\; x>4+2$
   (2) $x<3+2 \;\rightarrow\; x\not>1+5$
   (3) $x>3+1 \;\vee\; x<5$

Cuando un mismo término aparece más de una vez en un término complejo se puede elegir entre utilizar el axioma de asociatividad o el de conmu tatividad. Por ejemplo, obsérvense estas dos deducciones de $(2+1)+2=$ $=2+(1+2)$:

(1) $2+(1+2)=(1+2)+2$	$2/x$, $(1+2)/y$, Conm. Ax.
(2) $1+2=2+1$	$1/x$, $2/y$, Conm. Ax.
(3) $2+(1+2)=(2+1)+2$	I 1, 2

Se puede utilizar el axioma de la asociatividad para obtener la fórmula en un solo paso:

(1) $(2+1)+2=2+(1+2)$	$2/x$, $1/y$, $2/z$, Asoc. Ax.

Cuando en un término complejo aparecen más de tres términos, puede ser difícil indicar la especificación conveniente del axioma de asociatividad que conducirá al resultado deseado. Supóngase que se desea demostrar el teorema $(2+3)+(4+5)=2+(3+(4+5))$. Inténtese encajar el primer miembro en la forma $(x+y)+z$ o en la forma $x+(y+z)$. Si se colocan estas formas debajo del primer miembro y se comparan, es fácil ver la especificación requerida. Por ejemplo,

$$\begin{array}{c} (2+3)+(4+5) \\ (x+y)+(\;\;z\;\;) \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{c} (2+3)+(4+5), \\ (\;\;x\;\;)+(y+z) \end{array}$$

La primera sugiere la especificación universal de $2/x$, $3/y$, $(4+5)/z$. La segunda sugiere $(2+3)/x$, $4/y$, $5/z$. Aplicando la segunda especificación se tiene

$$((2+3)+4)+5=(2+3)+(4+5).$$

A pesar de que el primer miembro del teorema aparece en el segundo miembro de la especificación no se obtiene el resultado deseado en el otro miembro. Para ver si es posible en una especificación obtener ambos miembros del teorema, repítase el proceso llevado a cabo con el primer miembro, poniendo el segundo miembro del teorema encima de cada miembro del axioma de asociatividad:

$$\begin{array}{ccc} 2 & + & (3+(4+5)) \\ (x+y) & + & (\quad z \quad) \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{c} 2+(3+(4+5)) \\ x+(y+(\ z\ )) \end{array}$$

El primero de ellos sugiere $3+(4+5)/z$. Ésta es una especificación posible. Pero sugiere también $2/x+y$. Ésta es imposible. El segundo de ellos, sin embargo, sugiere la especificación universal $2/x$, $3/y$, $(4+5)/z$. Ésta es precisamente la primera especificación sugerida en el primer caso y que dará el teorema en un solo paso.

(1)	$(2+3)+(4+5)=2+(3+(4+5))$	$2/x$, $3/y$, $(4+5)/z$, Asoc. Ax.

Finalmente se observa que el primero y segundo miembro de una identidad pueden cambiarse entre sí, por una simple deducción, aplicando las reglas L e I.

(1)	$a=b$	P
(2)	$b=b$	L
(3)	$b=a$	I 1, 2

EJERCICIO 4

Demostrar los siguientes teoremas de adición.

TEOREMA 18. $5+(6+(4+3))=(5+6)+(4+3)$
TEOREMA 19. $2+(3+1)=3+(2+1)$
TEOREMA 20. $((2+5)+1)+7=1+(2+(5+7))$

(Se requiere el uso repetido de los axiomas de asociatividad y conmutatividad.)

Algunas veces es útil empezar una demostración introduciendo una premisa adicional para utilizarla en una demostración condicional o en una demostración indirecta. Por ejemplo, TEOREMA. $2/3=5/7.5 \rightarrow 5/7.5=2/3$

Demostración

(1)	$2/3=5/7.5$	P
(2)	$5/7.5=5/7.5$	L
(3)	$5/7.5=2/3$	I 1, 2
(4)	$2/3=5/7.5 \rightarrow 5/7.5=2/3$	CP 1, 3

Esta es una certeza de lógica, ya que la conclusión no depende de ninguna premisa. Se podría decir que es un teorema de Lógica. Las tautologías son también certezas de Lógica. Se pueden deducir como conclusiones independientes de premisas, como en el Ejercicio 9 del capítulo anterior.

EJERCICIO 5

A. Dar demostraciones de los siguientes teoremas de Lógica.

1. $(\forall x)(Fx) \rightarrow Fa$
2. $P \rightarrow Q \vee P$
3. $a=b \;\&\; Ga \rightarrow Gb$
4. $P \vee \neg P$
5. $3=2+1 \;\&\; b=3 \rightarrow 2+1=b$

B. Dar demostraciones de los siguientes teoremas de la aritmética de la adición, o sea los axiomas, definiciones y teoremas previos de la adición se pueden utilizar en las demostraciones.

TEOREMA 21. $(\forall x)(x+3>x) \rightarrow (1+(2+3))+4>2+5$
TEOREMA 22. $(3+1)+(2+4)=5+5$

A veces, en problemas complejos, es difícil reconocer la forma proposicional del razonamiento puesto que fórmulas atómicas que son equivalentes pueden parecer distintas. Al mismo tiempo es difícil indicar las fórmulas atómicas que se podría probar que son equivalentes si no se ha reconocido cuál es la forma del argumento proposicional. En estos casos puede ayudar a reconocer la parte proporcional del razonamiento, el aplicar los conocimientos de Aritmética para simplificar las fórmulas atómicas. *Este no es un paso lógico y no se escribe como parte de la demostración.* Por ejemplo,

Demostrar: $x > 2 + (2 + 1)$

(1) $x = (1 + 2) + (2 + 2) \rightarrow x > 3 + 2$

(2) $x > (3 + 1) + 2 \rightarrow x > (2 + 1) + 2$

(3) $x = 1 + (5 + 1) \vee x > 5 + 1$

Las fórmulas atómicas que se presentan son distintas. Sumando los términos complejos se tendría:

Demostrar: $x > 5$

(1) $x = 7 \rightarrow x > 5$

(2) $x > 6 \rightarrow x > 5$

(3) $x = 7 \vee x > 6$

En esta forma es mucho más fácil reconocer que en la deducción se aplicarán DS y DP. Pero es necesario utilizar las reglas que se refieren a los términos para demostrar (para el 7) que $(1+2)+(2+2)=1+(5+1)$ y (para el 6) que $(3+1)+2=5+1$ y (para el 5) que $(3+2)=(2+1)+2$, y $(2+1)+2=$ $=2+(2+1)$. Estos son cuatro teoremas que se han de demostrar para hacer posible la deducción proposicional. Antes de poder utilizar DS, se ha de demostrar todas las identidades anteriores.

A continuación se da una demostración formal del razonamiento:

(1)	$x = (1 + 2) + (2 + 2) \rightarrow x > 3 + 2$	P
(2)	$x > (3 + 1) + 2 \rightarrow x > (2 + 1) + 2$	P
(3)	$x = 1 + (5 + 1) \vee x > 5 + 1$	P
(4)	$(1 + 2) + (2 + 2) = (1 + 2) + (2 + 2)$	L
(5)	$(1 + 2) + (2 + 2) = (1 + 2) + 4$	I 4, T 10
(6)	$(1 + 2) + (2 + 2) = (1 + (1 + 1)) + 4$	I 5, Def. de 2
(7)	$(1 + (1 + 1)) + 4 = 1 + ((1 + 1) + 4)$	$1/x$, $1 + 1/y$, $4/z$, Asoc. Ax.
(8)	$(1 + 2) + (2 + 2) = 1 + ((1 + 1) + 4)$	I 6, 7
(9)	$(1 + 1) + 4 = 4 + (1 + 1)$	$1 + 1/x$, $4/y$, Conm. Ax.
(10)	$(1 + 2) + (2 + 2) = 1 + (4 + (1 + 1))$	I 8, 9
(11)	$(4 + 1) + 1 = 4 + (1 + 1)$	$4/x$, $1/y$, $1/z$, Asoc. Ax.

(12)	$(1+2)+(2+2)=1+((4+1)+1)$	I 10, 11
(13)	$(1+2)+(2+2)=1+(5+1)$	I 12, Def. de 5
(14)	$(3+1)+2=2+(3+1)$	$(3+1)/x$, $2/y$, Conm. Ax.
(15)	$(2+3)+1=2+(3+1)$	$2/x$, $3/y$, $1/z$, Asoc. Ax
(16)	$(3+1)+2=(2+3)+1$	I 14, 15
(17)	$2+3=3+2$	$2/x$, $3/y$, Conm. Ax.
(18)	$(3+1)+2=(3+2)+1$	I 16, 17
(19)	$(3+1)+2=5+1$	I 18, T. 11
(20)	$3+2=3+2$	L
(21)	$3+2=(2+1)+2$	I 20, Def. de 3
(22)	$(2+1)+2=2+(2+1)$	$(2+1)/x$, $2/y$, Conm. Ax.
(23)	$x=(1+2)+(2+2) \quad \vee \quad x>(3+1)+2$	I 3; 13, 19
(24)	$x>3+2 \quad \vee \quad x>(2+1)+2$	DS 23, 1, 2
(25)	$x>(2+1)+2 \quad \vee \quad x>(2+1)+2$	I 24, 21
(26)	$x>(2+1)+2$	DP 25
(27)	$x>2+(2+1)$	I 26, 22

Los cuatro teoremas numéricos se dedujeron en las líneas de la (4) a la (13), de la (14) a la (19), de la (20) a la (21), y en la (22). Puesto que los teoremas demostrados previamente pueden utilizarse en las demostraciones, se podrían haber deducido en cuatro demostraciones por separado. Si se hubiera hecho así en la demostración de este razonamiento, se hubieran requerido sólo las líneas (1), (2) y (3) para establecer las premisas, y las líneas de la (23) a la (27) para aplicar los teoremas y llevar a cabo la deducción proposicional.

La estrategia es la siguiente. Primero, determinar cuáles de las fórmulas atómicas son equivalentes para reconocer la forma proposicional del razonamiento y decidir qué identidades son necesarias. Segundo, demostrar las identidades requeridas —líneas de la (4) a la (22)—. Tercero, aplicar las identidades a las premisas para obtener fórmulas en las que fórmulas atómicas equivalentes aparezcan en forma idéntica —líneas (23), (25) y (27). Cuarto, llevar a cabo la deducción proposicional —líneas (24) y (26).

Si las identidades requeridas se prueban por separado, la deducción se cortará en partes. Cada una de las partes que afirma una identidad se denomina un *lema*. Como dicen algunas veces los matemáticos en broma, un lema es un «teorema pequeño». Más en serio, un lema es algo que se prueba principalmente con objeto de ayudar a demostrar algo más adelante. Se ha de hacer notar que, desde un punto de vista lógico, un lema tiene exactamente el mismo valor que un teorema.

Para demostrar, entonces que $x>2+(2+1)$ a partir de las tres premisas dadas, se demuestran primero tres lemas que no dependen de ninguna de las tres premisas, sino sólo de los axiomas y definiciones. El lema A es la línea (13) en la demostración que se acaba de dar, el lema B es la línea (19) y el lema C es la línea (21).

LEMA A. $(1+2)+(2+2)=1+(5+1)$

Demostración

(1)	$(1+2)+(2+2)=(1+2)+(2+2)$	L
(2)	$(1+2)+(2+2)=(1+2)+4$	I 1, T. 10
(3)	$(1+2)+(2+2)=(1+(1+1))+4$	I 2, Def. de 2
(4)	$(1+(1+1))+4=1+((1+1)+4$	$1/x$, $1+1/y$, $4/z$, Asoc. Ax.
(5)	$(1+2)+(2+2)=1+((1+1)+4)$	I 3, 4
(6)	$(1+1)+4=4+(1+1)$	$1+1/x$, $4/y$, Conm. Ax.
(7)	$(1+2)+(2+2)=1+(4+(1+1))$	I 5, 6
(8)	$(4+1)+1=4+(1+1)$	$4/x$, $1/y$, $1/z$, Asoc. Ax.
(9)	$(1+2)+(2+2)=1+((4+1)+1)$	I 7, 8
(10)	$(1+2)+(2+2)=1+(5+1)$	I 9, Def. de 5

LEMA B. $(3+1)+2=5+1$

Demostración

(1)	$(3+1)+2=2+(3+1)$	$(3+1)/x$, $2/y$, Conm. Ax.
(2)	$(2+3)+1=2+(3+1)$	$2/x$, $3/y$, $1/z$, Asoc. Ax.
(3)	$(3+1)+2=(2+3)+1$	I 1, 2
(4)	$2+3=3+2$	$2/x$, $3/y$, Conm. Ax.
(5)	$(3+1)+2=(3+2)+1$	I 3, 4
(6)	$(3+1)+2=5+1$	I 5, T. 11

LEMA C. $3+2=(2+1)+2$

Demostración

(1)	$3+2=3+2$	L
(2)	$3+2=(2+1)+2$	I 1, Def. de 3

No se establece la línea (22) como un lema aparte, porque su demostración es tan simple que puede incluirse en la deducción principal que se da a continuación:

(1) $x=(1+2)+(2+2) \quad \rightarrow \quad x>3+2$	P
(2) $x>(3+1)+2 \quad \rightarrow \quad x>(2+1)+2$	P
(3) $x=1+(5+1) \quad \vee \quad x>5+1$	P
(4) $x=(1+2)+(2+2) \quad \vee \quad x>(3+1)+2$	I 3, Lema A y B
(5) $x>3+2 \quad \vee \quad x>(2+1)+2$	DS 1, 2. 4
(6) $x>(2+1)+2 \quad \vee \quad x>(2+1)+2$	I 5, Lema C
(7) $x>(2+1)+2$	DP 6
(8) $(2+1)+2=2+(2+1)$	$2+1/x$, $2/y$, Conm. Ax.
(9) $x>2+(2+1)$	I 7, 8

Obsérvese que, demostrando primero los tres lemas, la longitud de la demostración principal se ha reducido a su tercera parte. A partir de aquí se introducirán tales lemas siempre que ayuden a simplificar o acortar las demostraciones.

Ejercicio 6

Dar una demostración de cada uno de los razonamientos siguientes. (Indicación: Es conveniente demostrar lemas por separado.)

1. Demostrar: $x>4+4 \quad \rightarrow \quad x>2+(1+2)$
   (1) $x>2+(3+3) \quad \rightarrow \quad x>5$
   (2) $x>(4+2)+2 \quad \rightarrow \quad x>5+3$

2. Demostrar: $y=4$
   (1) $x=((1+2)+3)+4 \quad \leftrightarrow \quad y=5+(3+5)$
   (2) $x=5+(1+4) \quad \vee \quad y=2+2$
   (3) $\neg[x=(4+3)+3 \quad \vee \quad y=2+((3+3)+5)]$

• 7.3 *Axioma del cero*

Se introduce ahora el «axioma del cero», que se abreviará «Cero Ax.».

$$(\forall x)(x+0=x)$$

El axioma dice algo que ya se sabe. Si se suma cero a cualquier número x, el resultado es el mismo número x.

Los teoremas que dependen de este axioma solo, no son muy interesantes. Se da uno y se proponen algunos otros como ejercicios.

TEOREMA 23. $(1+0)+0=1$

Demostración

(1)	$(1+0)+0=(1+0)+0$	L
(2)	$1+0=1$	$1/x$, Cero Ax.
(3)	$(1+0)+0=1+0$	I 1, 2
(4)	$(1+0)+0=1$	I 2, 3

Obsérvese que en la línea (1) se ha introducido una certeza lógica, como se indica por la «L» a la derecha. En este caso se tiene precisamente un ejemplo del hecho de ser $t=t$ para todo término t. Obsérvese también que después de obtener la línea (2) especificando «1» en vez de «x» en el axioma del cero, se utiliza esta línea dos veces para obtener la conclusión deseada.

También se obtiene una variante de este teorema utilizando el axioma de asociatividad.

TEOREMA 24. $1+(0+0)=1$

Demostración

(1)	$(1+0)+0=1+(0+0)$	$1/x$, $0/y$, $0/z$, Asoc. Ax.
(2)	$1+(0+0)=1+(0+0)$	L
(3)	$1+(0+0)=(1+0)+0$	I 1, 2
(4)	$1+(0+0)=1$	I 3, T. 23

Utilizando el axioma de conmutatividad, se puede demostrar:

TEOREMA 25. $2=1+(0+1)$

Demostración

(1)	$2=1+1$	Def. de 2
(2)	$1+0=0+1$	$1/x$, $0/y$, Conm. Ax.
(3)	$1+0=1$	$1/x$, Cero Ax.
(4)	$0+1=1$	I 2, 3
(5)	$2=1+(0+1)$	I 1, 4

Los teoremas que se acaban de demostrar son verdades de Aritmética muy conocidas. Este hecho no significa que sus demostraciones sean triviales. Nuestro propósito es mostrar que innumerables hechos de Aritmética se pueden deducir lógicamente de muy pocos axiomas fundamentales. Las definiciones permiten simplemente representar en forma breve las cosas. Sin las definiciones de «2», «3», «4» y «5», el número 5 debería representarse por:

$$1+(1+(1+(1+1))), \text{ ó } 1+((1+1)+(1+1)) \text{ ó } (1+(1+(1+1)))+1,$$

y así sucesivamente.

No todas las proposiciones de la aritmética familiar se pueden demostrar a partir de las definiciones y los tres axiomas introducidos hasta ahora. Por ejemplo, no se puede demostrar que $1 \neq 0$. Y hay que añadir esta afirmación como axioma.

De la misma manera que no todas las verdades de Aritmética pueden ser probadas, tampoco pueden ser definidos todos los números o predicados. Es necesario empezar en algún lugar con términos no definidos, como «1» y «0», así como con afirmaciones no demostradas como los axiomas. Esta es la forma de distinguir entre lo que es fundamental y lo que es deducido o definido. Todo el conjunto de términos no definidos, axiomas, definiciones y teoremas se denomina una *teoría*.

EJERCICIO 7

A. Demostrar los siguientes teoremas.

TEOREMA 26. $(2+0)+0=2$
TEOREMA 27. $3+(0+0)=3$
TEOREMA 28. $4=2+(0+2)$
TEOREMA 29. $5=2+(0+(3+0))$
TEOREMA 30. $4+(0+3)=((0+5)+0)+2$

B. Dar demostraciones formales de los siguientes razonamientos con la teoría de la Aritmética hasta ahora desarrollada, lo que indica que se pueden utilizar los axiomas y definiciones introducidos y los teoremas demostrados hasta aquí, así como las premisas de cada razonamiento.

1. Demostrar: $1>0$
   (1) $(\forall x)(x+1>x)$

2. Demostrar: $x=y+4$
   (1) $(x+3)+0=(y+2)+(3+2) \quad \leftrightarrow \quad x=(y+0)+4$
   (2) $y \neq 7$
   (3) $1+(2+x)=4+(3+y) \quad \vee \quad y=7$
3. Demostrar: $x+2=y+(4+2) \quad \& \quad y=3$
   (1) $x+2 \neq y+(2+(1+3)) \quad \rightarrow \quad (x+0)+1 \neq (2+(2+y))+1$
   (2) $x+1=(3+0)+(y+2) \quad \& \quad y+0=(1+0)+2$

C. El axioma del cero se expresa algunas veces diciendo que el cero es el elemento neutro por la derecha para la adición, pues sumando cero a un número dado se obtiene un número idéntico como suma. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

1. Cero es un elemento neutro para la multiplicación:
$$(\forall x)(x \cdot 0=x).$$
2. Cero es un elemento neutro por la derecha para la sustracción:
$$(\forall x)(x-0=x).$$
3. El cero es un elemento neutro por la izquierda para la sustracción:
$$(\forall x)(0-x=x).$$
4. Cero es un elemento neutro por la izquierda para la división:
$$(\forall x)(0 \div x=x).$$
5. Uno es un elemento neutro para la adición:
$$(\forall x)(x+1=x).$$
6. Uno es un elemento neutro para la multiplicación:
$$(\forall x)(x \cdot 1=x).$$
7. Uno es un elemento neutro por la derecha para la sustracción:
$$(\forall x)(x-1=x).$$
8. Uno es un elemento neutro por la derecha para la división:
$$(\forall x)(x \div 1=x).$$
9. Uno es un elemento neutro por la izquierda para la división:
$$(\forall x)(1 \div x=x).$$

● 7.4 *Axioma de los números negativos*

En la última sección se introdujo el cero. Se introducen ahora los números negativos estableciendo el axioma fundamental para la operación $-x$ de obtener el negativo de x. Su abreviatura es «Neg. Ax.».

$$(\forall x)(x+(-x)=0).$$

Ejemplos de números negativos son -1, -2, -3, etc. En la sucesión de números siguiente

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

cada número es menor que el número representado a su derecha. Los números negativos permiten que esta sucesión se prolongue indefinidamente en la otra dirección.

$$\ldots\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Este es el conjunto de los números enteros. Así, el conjunto de enteros incluye los enteros positivos, el cero y los enteros negativos. Cada número en la sucesión es menor que cada número representado a su derecha. Así $-4<-3$, $-5<3$, $-3<5$. También para cada número existe otro número que es tanto menor que cero cuanto el primero es mayor que cero, o viceversa. La operación de obtener el negativo de x, consiste en determinar dicho número. Si $x=5$ entonces $-x=-5$; y si $x=-3$ entonces $-x=3$. En general

$$(\forall x)(\forall y)(-x=y \quad\rightarrow\quad -y=x).$$

La operación $-x$ de obtener el negativo de x, parte de un término y genera un término distinto; es decir, «$-x$» es un término. El paréntesis que encierra «$-x$» en el axioma se puede omitir a menos que sea necesario indicar la agrupación que se ha de entender. Las fórmulas, en general, son más fáciles de leer cuando se ha prescindido de los paréntesis innecesarios, por lo que se omitirán siempre que sea posible.

El teorema que sigue, a pesar de su expresión simple, es difícil de demostrar. En particular, su demostración depende de los cuatro axiomas que se han introducido en este capítulo.

TEOREMA 31. $1+(2+(-1))=2$

Demostración

(1)	$1+(2+-1)=1+(2+-1)$	L
(2)	$(1+2)+-1=1+(2+-1)$	$1/x$, $2/y$, $-1/z$, Asoc. Ax.
(3)	$1+(2+-1)=(1+2)+-1$	I 1, 2
(4)	$1+2=2+1$	$1/x$, $2/y$, Conm. Ax.
(5)	$1+(2+-1)=(2+1)+-1$	I 3, 4
(6)	$(2+1)+-1=2+(1+-1)$	$2/x$, $1/y$, $-1/z$, Asoc. Ax.

(7)	$1+(2+-1)=2+(1+-1)$	I 5, 6
(8)	$1+-1=0$	$1/x$, Neg. Ax.
(9)	$1+(2+-1)=2+0$	I 7, 8
(10)	$2+0=2$	$2/x$, Cero Ax.
(11)	$1+(2+-1)=2$	I 9, 10

Usando con más libertad la regla de inferencia referente a identidades es posible acortar la demostración y, lo que es más importante, presentar más clara su estructura esencial. En primer lugar se podría eliminar la línea (1) si se pudieran intercambiar automáticamente los dos miembros de una identidad, en este caso el axioma de asociatividad. Especificando simplemente $1/x$, $2/y$ y $-1/z$ en el axioma, se obtiene la línea (2)

$$(1+2)+-1=1+(2+-1).$$

Pero, en realidad se desea empezar por «$1+(2+-1)$» en el primer miembro, pues éste es el primer miembro de la identidad que se desea demostrar. En lo sucesivo se utilizará la regla que permite intercambiar los dos miembros de una identidad sin citar la regla. Entonces se pueden sustituir las tres primeras líneas de una vez por

(1) $1+(2+-1)=(1+2)+-1$ $1/x$, $2/y$, $-1/z$, Asoc. Ax.

De manera análoga se eliminará la regla **I**, frecuentemente citada, sobreentendiendo su uso y procediendo de la manera siguiente:

(1)	$1+(2+-1)=(1+2)+-1$	$1/x$, $2/y$, $-1/z$, Asoc. Ax.
(2)	$=(2+1)+-1$	$2/x$, $1/y$, Conm. Ax.
(3)	$=2+(1+-1)$	$2/x$, $1/y$, $-1/z$, Asoc. Ax.
(4)	$=2+0$	$1/x$, Neg. Ax.
(5)	$=2$	$2/x$, Cero Ax.

Mientras el primer miembro de la identidad permanezca el mismo en cada línea, no se escribirá cada vez. La línea final, línea (5), es entonces

$$1+(2+-1)=2.$$

La demostración se ha reducido simplemente a una sucesión de identidades, indicando en cada paso qué especificación se hizo al aplicar el axioma. Obsérvese que en las líneas (1), (3) y (5) se obtuvo la identidad completa especificando en un axioma. En las líneas (2) y (4) sólo se ha considerado una parte de la identidad. Así, para obtener la línea (2) se utiliza la especificación $2/x$, $1/y$ en el axioma de conmutatividad, obteniéndose:

$$2+1=1+2,$$

para después sustituir «2+1» por «1+2» en la línea (1).

Este nuevo estilo de demostración puede ilustrarse también probando otro teorema análogo al anterior.

TEOREMA 32. $-2+(1+2)=1$

Demostración

(1)	$-2+(1+2)=-2+(2+1)$	$1/x$, $2/y$, Conm. Ax.
(2)	$=(-2+2)+1$	$-2/x$, $2/y$, $1/z$, Asoc. Ax.
(3)	$=(2+-2)+1$	$-2/x$, $2/y$, Conm. Ax.
(4)	$=0+1$	$-2/x$, Neg. Ax.
(5)	$=1+0$	$0/x$, $1/y$, Conm. Ax.
(6)	$=1$	$1/x$, Cero Ax.

En lo sucesivo se utilizará de la manera indicada la regla que rige identidades y como en la demostración anterior se excluirán las referencias.

EJERCICIO 8

A. Demostrar los siguientes teoremas

TEOREMA 33. $2+(-1)=1$

TEOREMA 34. $-1+3=2$

TEOREMA 35. $-5+1=-4$ [Indicación: La demostración contiene la adición del cero por el axioma del cero y luego la sustitución del 0 utilizando el axioma de los negativos.]

TEOREMA 36. $2+(1+-2)=1$

TEOREMA 37. $-4+(3+4)=3$

TEOREMA 38. $3+(-5+-3)=-5$

TEOREMA 39. $(2+(1+-1))+-2=0$

TEOREMA 40. $1+-5=-((1+2)+1)$

TEOREMA 41. $-2+5=1+2$

TEOREMA 42. $-(2+(0+2))+(2+5)=(1+0)+(4+(2+-4))$

B. Dar demostraciones de los siguientes razonamientos con la teoría de la Aritmética hasta ahora desarrollada:

1. Demostrar: $(7+0)+(x+-7)=(-4+x)+(2+(0+2))$
2. Demostrar: $(1+0)+(1+x)=(5-3)+(2+y)$
   (1) $x=y+2 \quad \leftrightarrow \quad -1+(3+x)=0+(y+4)$
   (2) $x=(y+4)+-2$
3. Demostrar: $x^2 \neq 4+5 \quad \rightarrow \quad x=3+-1$
   (1) $(x^2+-x)+-6=-3+(-2+5)$
   (2) $x=-(2+1) \quad \rightarrow \quad x^2=(5+1)+(4+-1)$
   (3) $(x^2+-x)+-6=0 \quad \rightarrow \quad \neg(x \neq -3 \quad \& \quad x \neq 1+1)$

C. El elemento neutro para la adición es el 0, pues cero sumado a cualquier número da el mismo número. El axioma del cero expresa, pues, que el cero es el elemento neutro de la adición.

1. ¿Cuál es el elemento neutro de la multiplicación?
2. Escribir el axioma correspondiente.
   El número $-x$ se denomina el inverso de x respecto a la adición, pues causa exactamente el efecto opuesto al de sumar x, o dicho de otra forma, se llama inverso de x porque $-x$ sumado a x da el elemento idéntico de la suma; es decir: $x+(-x)=0$.
3. ¿Cuál es el inverso de x respecto a la multiplicación?
4. Escribir el axioma correspondiente.

D. Escribir los números siguientes en sucesión creciente empezando por el menor.

$$2, 3, -5, 0, 4, -7, -9, 6, -15, -4.$$

E. Para cada uno de los números siguientes dar el inverso respecto a la adición.

1. 5	6. -3
2. 2	7. -9
3. 4	8. 0
4. -6	9. -7
5. 8	10. 1

F. Para cada uno de los números de **E** dar el inverso respecto a la multiplicación.

Examen de repaso

I. Establecer los siguientes axiomas en forma simbolizada.

a. El axioma de conmutatividad para la adición.
b. El axioma de asociatividad para la adición.
c. El axioma del cero.
d. El axioma de los números negativos.

II. Poner una «C» para las afirmaciones ciertas y una «F» para las afirmaciones falsas.

a. $(\forall x)(x-0=x)$
b. $(\forall x)(x \cdot 0=x)$
c. $(\forall x)(0-x=x)$
d. $(\forall x)(x+1=x)$
e. $(\forall x)(x \cdot 1=x)$
f. $(\forall x)(x \div 1=x)$

III. Demostrar los siguientes teoremas utilizando los axiomas y definiciones introducidas en este capítulo:

a. Demostrar: $3=2+(0+1)$
b. Demostrar: $(2+0)+0=1+1$
c. Demostrar: $-2+(0+2)=0$
d. Demostrar: $5=2+(1+2)$
e. Demostrar: $2+(2+-2)=2$

IV. Dar una demostración formal de los razonamientos siguientes con la teoría de la Aritmética desarrollada hasta este momento.

Demostrar: $\neg(y=-4 \quad \rightarrow \quad x=-2)$

(1) $\neg(y=(2+0)+1 \quad \vee \quad y+-x \neq -5)$
(2) $x=-(-1+3) \quad \rightarrow \quad y=-4+(3+4)$
(3) $y+-x=3+(-5+-3) \quad \rightarrow \quad y=-5+1$

CAPITULO 8

GENERALIZACIÓN UNIVERSAL

CAPITULO 8

8.1 *Teoremas con variables*

Se ha podido observar que la demostración del Teorema 36 en el ejercicio de la última sección (7.4) parecía casi análoga a la demostración del Teorema 31. En efecto, la única diferencia estaba en que «1» sustituía «2» y «2» sustituía «1». En vez de demostrar los teoremas por separado para cada número se pueden escribir para números arbitrarios, «x», «y» y «z». En este caso se hace la especificación con las variables «x», «y» y «z» en vez de especificar introduciendo los símbolos numéricos «1», «2», etc. Por otra parte, la estructura de la demostración permanece inalterada.

Por ejemplo, si se formula el Teorema 31 del capítulo anterior con «x» e «y», se lee:

$$x+(y+(-x))=y,$$

y la demostración es precisamente la segunda dada para el Teorema 31 sustituyendo el «1» por «x» y el «2» por «y».

(1)	$x+(y+-x)=(x+y)+-x$	x/x, y/y, $-x/z$, Asoc. Ax.
(2)	$=(y+x)+-x$	x/x, y/y, Conm. Ax.
(3)	$=y+(x+-x)$	y/x, x/y, $-x/z$, Asoc. Ax.
(4)	$=y+0$	x/x, Neg. Ax.
(5)	$=y$	y/x, Cero Ax.

Pero tal como se presentan, estos teoremas no son particularmente útiles para nosotros. Lo que deseamos es usar teoremas expresados por medio de variables en las demostraciones de otros teoremas generales, y para ello se necesita poder especificar nuevas variables para las antiguas. Por ejemplo, en la forma nueva del Teorema 31 que se acaba de dar, se puede necesitar el caso especial en el que $y=x$, de manera que especificando x/x y también x/y se obtenga:

$$x+(x+(-x))=x.$$

Para hacer esto precisaría tener el teorema expresado por medio de los cuantificadores universales para permitir el uso de la especificación:

$$(\forall x)(\forall y)(x+(y+-x=y)).$$

De esto, los Teoremas 31 y 36 se podrían obtener por especificaciones universales:

(TEOREMA 31)	$1+(2+-1)=2$	$1/x$, $2/y$
(TEOREMA 32)	$2+(1+-2)=1$	$2/x$, $1/y$

Además, mediante distintas especificaciones, se puede obtener un gran número de teoremas adicionales.

La regla que permite añadir cuantificadores universales se denomina «Generalización universal» y su abreviatura es «UG». Su justificación lógica es directa: todo lo que se pueda afirmar, o establecer por medio de premisas, para cualquier objeto *arbitrario* se ha de verificar para cada *objeto*.

La regla de *Generalización universal* es:

De la fórmula S se infiere $(\forall v)(S)$.

Hay algunas condiciones bajo las cuales esta regla no es aplicable. (Véase la nota al pie de la página 274.) Sin embargo, en los problemas de este libro estas condiciones no se presentan cuando se ha de aplicar UG.

Se podría aplicar la regla a la demostración dada en la página 270 añadiendo como línea (6).

(6) $(\forall x)(\forall y)(x+(y+-x)=y)$ UG 5

La generalización universal se puede aplicar también para resolver el problema de inferencia mencionado al empezar el Capítulo 5. Allí se establecía que el razonamiento siguiente parecía intuitivamente bueno, pero que la conclusión no podía deducirse con las reglas hasta entonces conocidas.

Todos los pájaros son animales.
Todos los ruiseñores son pájaros.
Por tanto, todos los ruiseñores son animales.

Simbolizando las premisas como entonces, el razonamiento es sencillo:

(1)	$(\forall x)(Bx \rightarrow Ax)$	P
(2)	$(\forall x)(Rx \rightarrow Bx)$	P
(3)	$Rx \rightarrow Bx$	x/x 2
(4)	$Bx \rightarrow Ax$	x/x 1
(5)	$Rx \rightarrow Ax$	HS 3, 4
(6)	$(\forall x)(Rx \rightarrow Ax)$	UG 5

La línea (6) es, evidentemente, la traducción simbólica de la conclusión «Todos los ruiseñores son animales».

Como segundo ejemplo se considera el siguiente razonamiento:

Ningún pez es mamífero.
Todos los perros son mamíferos.
Por tanto, ningún pez es perro.

Se define: $Fx \leftrightarrow x$ es un pez
$Mx \leftrightarrow x$ es un mamífero
y $Dx \leftrightarrow x$ es un perro.

Demos: $(\forall x)(Fx \rightarrow \neg Dx)$

(1)	$(\forall x)(Fx \rightarrow \neg Mx)$	P
(2)	$(\forall y)(Dy \rightarrow My)$	P
(3)	$Fx \rightarrow \neg Mx$	x/x 1
(4)	$Dx \rightarrow Mx$	x/y 2
(5)	Fx	P
(6)	$\neg Mx$	PP 3, 5
(7)	$\neg Dx$	TT 4, 6
(8)	$Fx \rightarrow \neg Dx$	CP 5, 7
(9)	$(\forall x)(Fx \rightarrow \neg Dx)$	UG 8

Obsérvese que se ha escrito la segunda premisa en la línea (2) utilizando la variable «y». En el ejemplo de los ruiseñores, la segunda premisa se simbolizó utilizando «x». Se han puesto de manifiesto las dos alternativas para indicar que *ambas* son lógicamente correctas.

Ejercicio 1

A. Dar deducciones para mostrar que los razonamientos siguientes son válidos.

1. Todas las serpientes son reptiles.
   Todos los reptiles son vertebrados.
   Por tanto, todas las serpientes son vertebrados.
2. Ningún violín es instrumento de viento hecho de madera.
   Todos los oboes son instrumentos de viento hechos de madera.
   Por tanto, ningún violín es oboe.
3. Todos los realistas son monárquicos.
   Ningún demócrata es monárquico.
   Por tanto, ningún demócrata es realista.
4. Todos los logicistas son personas inteligentes.
   Ninguna persona inteligente es engañada fácilmente.
   Por tanto, ningún logicista es engañado fácilmente.
5. Todas las ambulancias son automóviles.
   Todos los automóviles son vehículos.
   Por tanto, todas las ambulancias son vehículos.
6. Ningún mamífero es pájaro.
   Todas las golondrinas son pájaros.
   Por tanto, ninguna golondrina es mamífero.
7. Ningún gato es canino.
   Todos los perros son caninos.
   Por tanto, ningún gato es perro.
8. Todas las rosas son plantas.
   Todas las plantas son seres vivientes.
   Por tanto, todas las rosas son seres vivientes.
9. Todos los tambores son instrumentos de percusión.
   Todos los tamboriles son tambores.
   Por tanto, todos los tamboriles son instrumentos de percusión.
10. Todos los sonetos son poesías.
    Ningún documento legal es una poesía.
    Por tanto, ningún documento legal es un soneto.
11. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x > y \;\;\&\;\; y > z \;\;\rightarrow\;\; x > z)$
    $(\forall x)(x + 1 > x)$
    Por tanto, $(\forall x)(x + 3 > x)$

B. Escribir, utilizando variables, los Teoremas 5, 10, 15, y del 31 al 42 del Capítulo 7, sustituyendo números diferentes por variables diferentes. Después añadir al principio los cuantificadores universales apropiados. ¿Cuáles de las proposiciones resultantes son ciertas en Aritmética? Para las que sean ciertas dar las demostraciones.

C. Dar demostraciones formales completas de los Problemas 1, 5, 7, 9, 11, 14, 15 y 20 del Ejercicio 1 del Capítulo 5.

• 8.2 *Teoremas con cuantificadores universales*

Disponiendo ahora de la generalización universal es posible demostrar algunos teoremas fundamentales de naturaleza general. Para facilitar el recuerdo se escriben de nuevo los cuatro axiomas introducidos en el Capítulo 7.

Axioma de Conmutatividad	$(\forall x)(\forall y)(x+y=y+x)$
Axioma de Asociatividad	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x+y)+z=x+(y+z))$
Axioma del Cero	$(\forall x)(x+0=x)$
Axioma de los números negativos	$(\forall x)(x+(-x)=0)$

Puesto que los teoremas que se demostrarán en esta sección no dependen de los demostrados en el Capítulo 7, se numerarán partiendo otra vez del 1. El primer teorema afirma lo que se conoce por regla de *simplificación* por la izquierda de la adición. La expresión del teorema sigue a su demostración.

TEOREMA 1. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x+y=x+z \quad \rightarrow \quad y=z)$

Demostración

(1)	$x+y=x+z$	P*
(2)	$y=y+0$	y/x, Cero Ax.
(3)	$=0+y$	y/x, $0/y$, Conm. Ax.
(4)	$=(x+(-x))+y$	x/x, Neg. Ax.
(5)	$=(-x+x)+y$	x/x, $-x/y$, Conm. Ax.

* Las condiciones bajo las que no se pueden aplicar la generalización universal se presentan cuando, como aquí, se introduce una premisa que contiene variables sin cuantificadores. UG no se puede aplicar en esta demostración subordinada. Sin embargo, no es necesario aplicarla en la demostración subordinada. La línea (13) no está en la subordinación y, por tanto, no depende de la premisa añadida. UG se puede aplicar. Afortunadamente, las premisas que contienen variables no cuantificadas no acostumbran a presentarse en razonamientos en los que sería conveniente aplicar UG. Éstas incluyen demostraciones subordinadas donde tales premisas se presentan a menudo, pero en las que normalmente no es necesario aplicar UG.

(6)	$= -x+(x+y)$	$-x/x$, x/y, y/z, Asoc. Ax.
(7)	$= -x+(x+z)$	Línea (1)
(8)	$=(-x+x)+z$	$-x/x$, x/y, z/z, Asoc. Ax.
(9)	$=(x+-x)+z$	$-x/x$, x/y, Conm. Ax.
(10)	$=0+z$	x/x, Neg. Ax.
(11)	$=z+0$	$0/x$, z/y, Conm. Ax.
(12)	$=z$	z/x, Cero Ax.
(13)	$x+y=x+z \quad \rightarrow \quad y=z$	CP 1, 13
(14)	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x+y=x+z \quad \rightarrow \quad y=z)$	UG 13

Para entender exactamente qué es lo que implica este teorema se considera primero un ejemplo del mismo:

$$3+y=3+4 \quad \rightarrow \quad y=4 \qquad 3/x,\ y/y,\ 4/z, \quad \text{T. } 1$$

El razonamiento correspondiente a esta condicional es

Premisa: $3+y=3+4$
Conclusión: $y=4$

La conclusión resulta de las premisas al simplificar los dos «3» colocados a la izquierda del signo de sumar. Para obtener la condicional «$x+y=x+x \rightarrow y=z$», se utiliza una demostración condicional. Ésta requiere la premisa agregada «$x+y=x+z$». Obsérvese que la premisa adicional de la línea (1) podría haberse introducido más tarde, pero era más conveniente ponerla al principio y no introducirla dentro de una cadena de identidades. Obsérvese también que la línea (1) se ha utilizado sólo en un paso, en la línea (7). Demostrar una ley de simplificación equivale a encontrar un argumento lógico para reducir la longitud de expresiones: se trata de pasar de «$x+y=x+z$» a «$y=z$». Dos axiomas permiten tal reducción, el axioma del cero y el axioma de los números negativos. La estrategia de la demostración es aplicar primero el axioma de los números negativos para sustituir «x» por «0» y después quitar el 0 de «$0+z$». Evidentemente, que los otros dos axiomas se usan repetidamente al llevar a cabo esta estrategia.

La ley de simplificación puede utilizarse para demostrar el hecho familiar que el negativo del negativo de un número es el mismo número.

TEOREMA 2. $(\forall x)(-(-x)=x)$

Demostración

(1)	$x+-x=0$	x/x, Neg. Ax.
(2)	$-x+x=0$	x/x, $-x/y$, Conm. Ax. 1
(3)	$-x+-(-x)=0$	$-x/x$, Neg. Ax.
(4)	$-x+-(-x)=-x+x$	I 1, 3
(5)	$-x+-(-x)=-x+x \rightarrow -(-x)=x$	$-x/x$, $-(-x)/y$, x/z, T. 1
(6)	$-(-x)=x$	PP 4, 5
(7)	$(\forall x)(-(-x)=x)$	UG 6

A continuación se da la demostración del Teorema 3. Obsérvese que el término de enlace principal es una *equivalencia.* En esta situación es necesario cortar la demostración en dos partes, demostrando primero una implicación y después la otra, cada una por demostración condicional.

TEOREMA 3. $(\forall x)(\forall y)(-x=y \leftrightarrow x+y=0)$.

Demostración

(1)	$-x=y$	P
(2)	$x+-x=0$	x/x, Neg. Ax.
(3)	$x+y=0$	I 1, 2
(4)	$-x=y \rightarrow x+y=0$	CP 1, 3
(5)	$x+y=0$	P
(6)	$x+-x=0$	x/x, Neg. Ax.
(7)	$x+y=x+-x$	I 5, 6
(8)	$x+y=x+-x \rightarrow y=-x$	x/x, y/y, $-x/z$, T. 1
(9)	$-x=y$	PP 7, 8
(10)	$x+y=0 \rightarrow -x=y$	CP 5, 9
(11)	$-x=y \leftrightarrow x+y=0$	LB 4, 10
(12)	$(\forall x)(\forall y)(-x=y \leftrightarrow x+y=0)$	UG 11

El Teorema 3 dice que $-x$ es el único número que puede sumarse a x para obtener la suma 0.

Al llegar aquí se define la operación binaria de sustracción a partir de la adición y de la operación negativa. Tal como se indicó en el Capítulo 7, desde un punto de vista lógico una definición de esta naturaleza actúa como una premisa adicional. Tiene el mismo valor que un axioma y se puede tomar y utilizar en todas las demostraciones como una premisa.

DEFINICIÓN 1. $(\forall x)(\forall y)(x-y=x+(-y))$

Se demuestra en primer lugar que restar el negativo de un número es lo mismo que sumar el mismo número. La demostración depende esencialmente del Teorema 2 y de la definición 1.

TEOREMA 4. $(\forall x)(\forall y)(x-(-y)=x+y)$

Demostración

(1)	$x-(-y)=x+-(-y)$	x/x, $-y/y$, Def. 1
(2)	$\quad\quad =x+y$	y/x, T. 2
(3)	$(\forall x)(\forall y)(x-(-y)=x+y)$	UG 2

Se desea demostrar después que $x-0=x$, pero es conveniente demostrar antes que el negativo de 0 es 0. Esta demostración utiliza esencialmente el Teorema 3.

TEOREMA 5. $-0=0$

Demostración

(1)	$-0=0 \quad \leftrightarrow \quad 0+0=0$	$0/x$, $0/y$, T. 3
(2)	$0+0=0$	$0/x$, Cero Ax.
(3)	$0+0=0 \quad \rightarrow \quad -0=0$	LB 1
(4)	$-0=0$	PP 2, 3

La demostración de que $x-0=x$ se deja como ejercicio, que es fácil pudiendo aplicar el Teorema 5. Otros teoremas se dan como ejercicios.

EJERCICIO 2

A. Demostrar los teoremas siguientes.

TEOREMA 6. $(\forall x)(x-0=x)$

TEOREMA 7. $(\forall x)(0-x=-x)$
TEOREMA 8. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x-y)+(y-z)=x-z)$
TEOREMA 9. $(\forall x)(\forall y)(-x=y \quad \leftrightarrow \quad x=-y)$
TEOREMA 10. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x+y=z+y \quad \rightarrow \quad x=z)$
TEOREMA 11. $(\forall x)(\forall y)((-y+-x)+(x+y)=0$
TEOREMA 12. $(\forall x)(\forall y)(-(x+y)=-x+-y)$
TEOREMA 13. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)((x-y)+(z-w)=(x+z)-(y+w)$
TEOREMA 14. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)((x-y)-(z-w)=(x+w)-(y+z))$
TEOREMA 15. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x-y=z \quad \leftrightarrow \quad x-z=y)$
TEOREMA 16. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x+y=z \quad \leftrightarrow \quad x-z=-y)$
TEOREMA 17. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(x-y=z-w \quad \leftrightarrow \quad x+w=y+z)$

B. Dar demostraciones formales de los razonamientos siguientes con la teoría de Aritmética de este capítulo y las definiciones de los enteros, si es necesario:

1. Demostrar: $-3<-2$
   (1) $(\forall x)(x<x+1)$
2. Demostrar: $x+x=0$
   (1) $x=0$
3. Demostrar: $x=-4$
   (1) $x+5=1$
4. Demostrar: $(\forall x)(x<0 \quad \leftrightarrow \quad 0<-x)$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(y<z \quad \rightarrow \quad (x+y<x+z))$
5. Demostrar: $(\forall x)\neg(x<x)$
   (1) $(\forall x)(\forall y)(x<y \quad \rightarrow \quad \neg(y<x))$

INDICE ALFABÉTICO